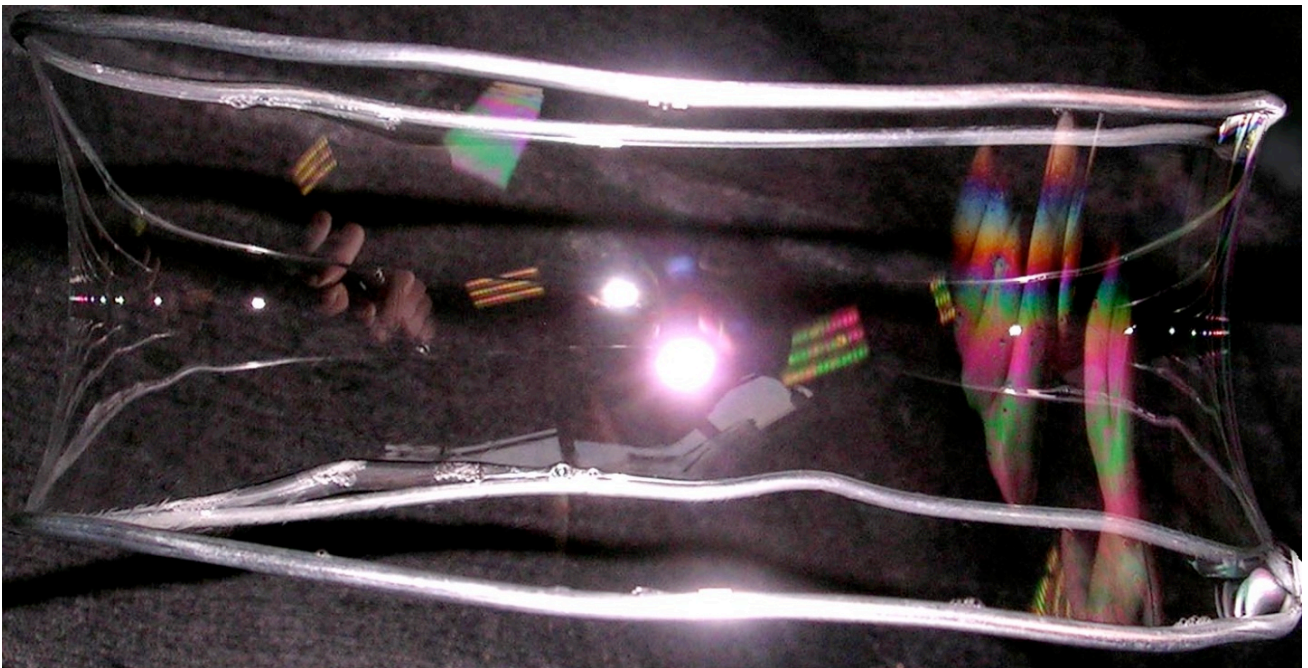


# SURFACES MINIMALES ET FILMS DE SAVON

## 1. Introduction

- Comment expliquer la forme prise par un film de savon, obtenu en plongeant une structure métallique dans de l'eau savonneuse ?



- Ces formes sont dues aux forces de tension superficielle. Après avoir établi quelques propriétés de ces forces (dont leur ordre de grandeur), on peut étudier leur effet sur un film de savon tendu entre deux cercles coaxiaux de même rayon.

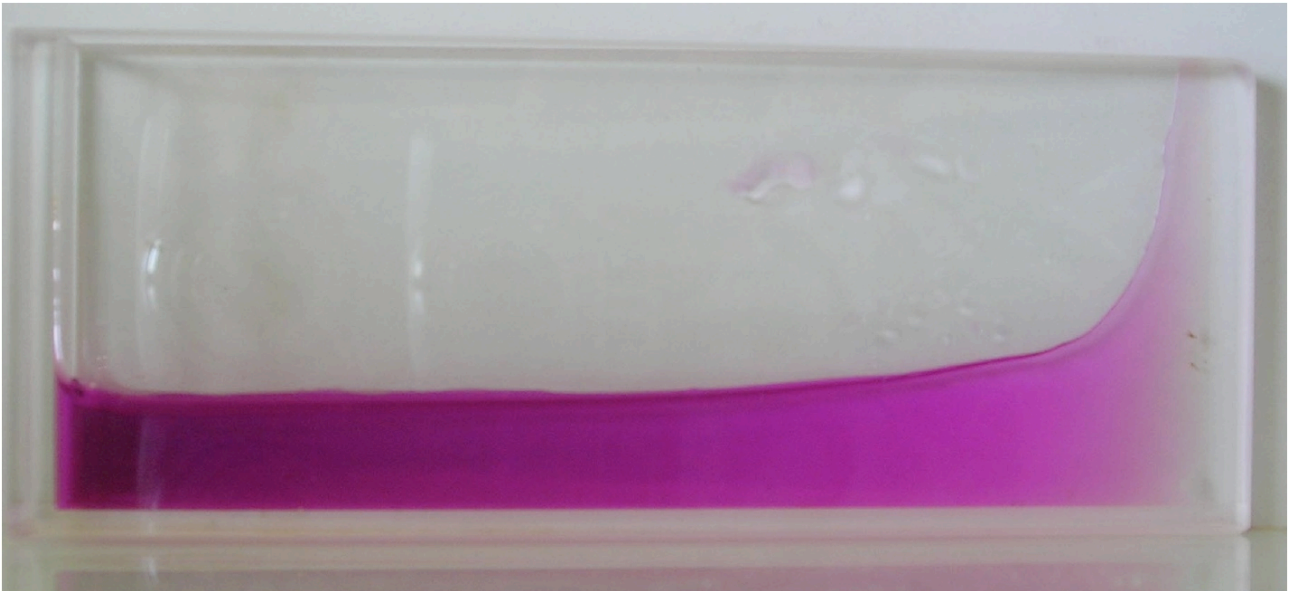
Le résultat prédit par les mathématiques, comme l'avait fait Euler en 1744, peut alors être confronté aux mesures effectuées.

## 2. La tension superficielle

### 2.1. Observation qualitative

- Lors de certaines expériences on observe des phénomènes non expliqués par les seules forces pressantes.

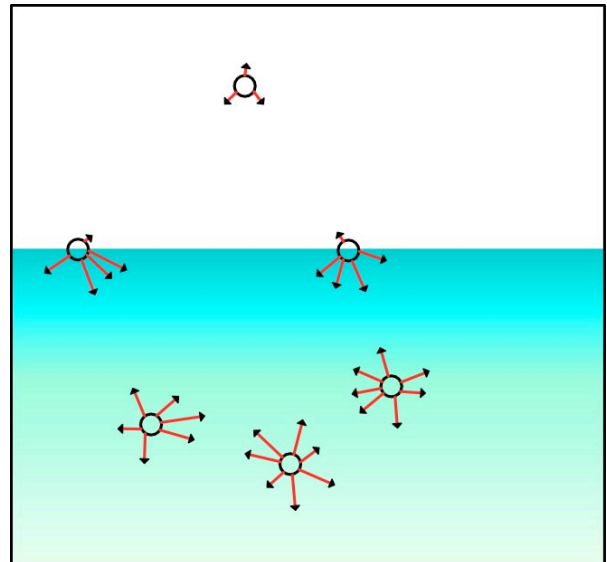
Par exemple, dans une cuve cunéiforme (en forme de coin) remplie de liquide coloré, on remarque que le liquide s'élève là où les parois se rapprochent ; la surface prend alors une forme de type hyperbolique.



## 2.2. Tension superficielle et énergie de surface

- Les interactions dans un gaz étant plus faibles que dans un liquide, il faut fournir du travail pour entraîner une molécule du liquide jusqu'à la surface de celui-ci.

Pour causer une augmentation  $dA$  de l'aire de la surface, il faut fournir un travail  $dW$  proportionnel au nombre  $dN$  de molécules à entraîner à la surface, d'où l'existence d'une énergie de surface  $E_s$ .

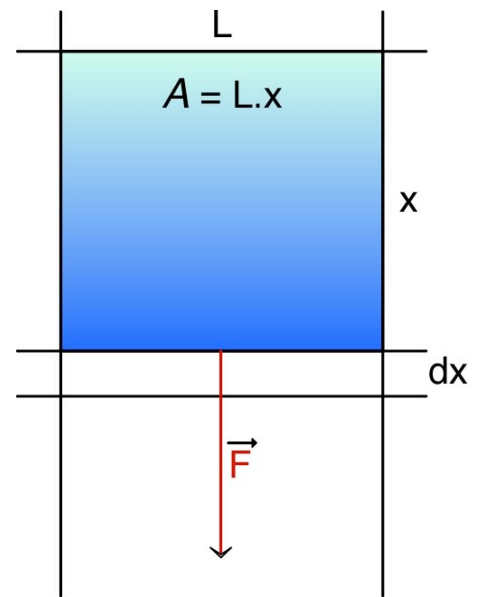


Or, ce nombre  $dN$  est lui même proportionnel à l'aire correspondante :

$$dE_s = dW = \alpha dN = \gamma dA \quad ; \quad E_s = \gamma A.$$

- Pour un dispositif horizontal (sans effet de la pesanteur) et compte tenu des deux faces de la lame liquide, le travail pour augmenter l'aire de  $dA$  est :  $dW = F \cdot dx = 2\gamma dA = 2\gamma L dx$ , donc :  $F = 2\gamma L$ .

La force de tension superficielle  $\vec{F}$  est caractérisée par le coefficient de tension superficielle  $\gamma$  (en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} = \text{J} \cdot \text{m}^{-2}$ ).



## 2.3. Mesure de la tension superficielle

### 2.3.1. Tubes capillaires

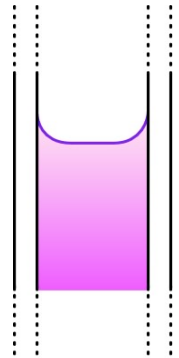
- En plongeant un tube capillaire de rayon  $r$  dans une cuve de liquide, on peut relier la tension superficielle à la hauteur  $h$  dont le liquide s'élève dans le tube :





• Le périmètre du tube est  $p = 2\pi r$ , donc la tension superficielle exerce sur le pourtour une force  $F = \gamma p = 2\pi r \gamma$  (en supposant au niveau du ménisque un raccordement de la surface liquide tangentiel à la paroi, donc vertical).

L'aire de la section du tube est  $a = \pi r^2$ , donc le poids de la colonne de liquide est  $P = ah \rho g = \pi r^2 h \rho g$ .



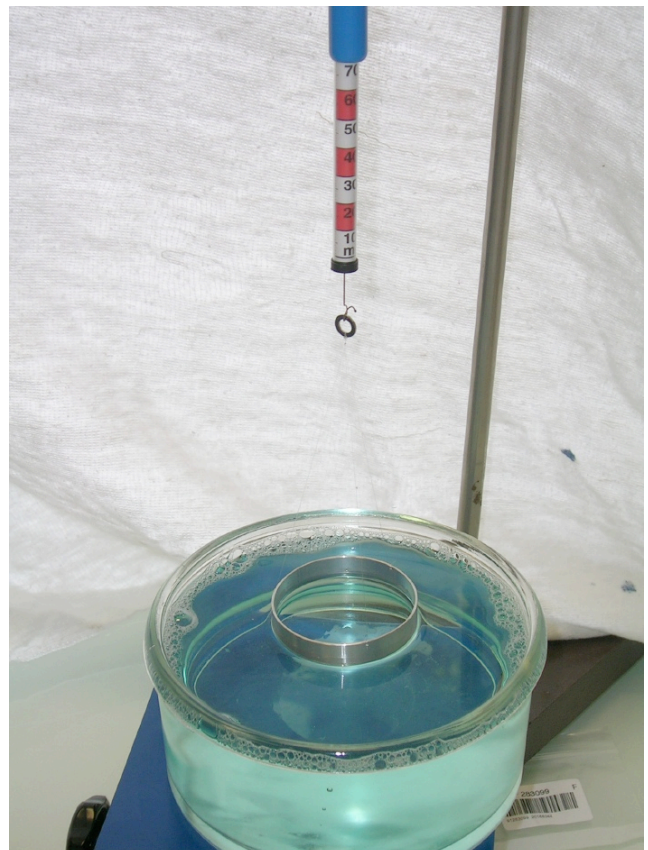
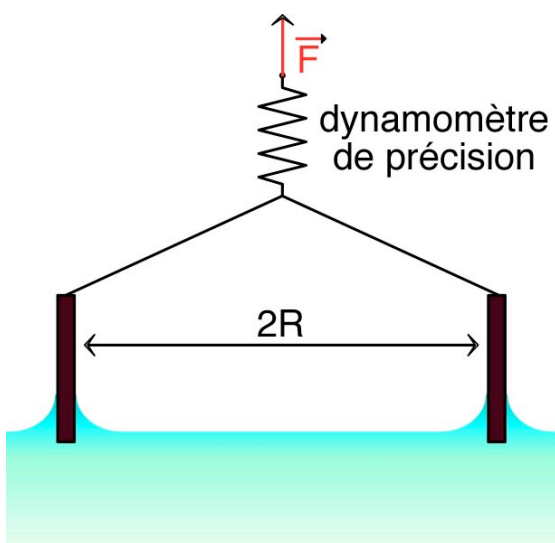
À l'équilibre, la compensation de ces forces impose :  $h = \frac{2\gamma}{r\rho g}$  (loi de Jurin).

### 2.3.2. Tensiomètre

• Pour arracher l'anneau au liquide il faut exercer une force  $F$  compensant le poids et la tension superficielle (le périmètre est compté deux fois car le film liquide cylindrique a deux faces) :  $F = P + 2\gamma 2\pi R$ .

La mesure donne :

$$\gamma = 0,07 \pm 0,005 \text{ N.m}^{-1}.$$



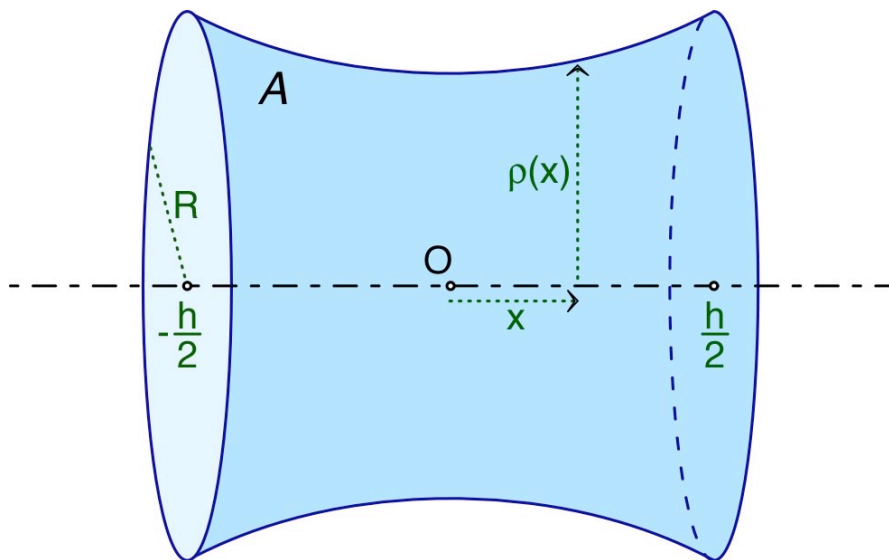


### 3. Une surface minimale : la caténoïde

#### 3.1. Problème posé

- On désire expliquer la forme du film liquide formé entre deux anneaux identiques de rayon  $R$ , décalés d'une longueur  $h$  selon leur axe commun.

Afin de minimiser l'énergie de surface, il faut déterminer le minimum de l'aire. D'après la symétrie du problème, on recherche une surface de révolution, donc une expression  $\rho(x) \in C^\infty\left(\left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right]\right)$  qui minimise la surface.



- L'aire peut s'écrire :  $A = \int_{-h/2}^{h/2} 2\pi\rho(x) \sqrt{1+(\rho'(x))^2} dx = \int_{-h/2}^{h/2} L(\rho, \rho') dx$ .

#### 3.2. Méthode de calcul du minimum

- Lorsqu'on fait varier la fonction pour des limites fixes :

$$\delta A = \int_{-h/2}^{h/2} \delta L(\rho, \rho') dx = \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial L}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial L}{\partial \rho'} \delta \rho' \right) dx.$$

Puisque  $\delta(\rho') = (\delta\rho)'$  l'intégration par parties donne :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial L}{\partial \rho'} \delta \rho' dx = \left[ \frac{\partial L}{\partial \rho'} \delta \rho \right]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial L}{\partial \rho'} \right)' \delta \rho dx ;$$

$$\delta A = \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial L}{\partial \rho} - \left( \frac{\partial L}{\partial \rho'} \right)' \right) \delta \rho dx .$$

Le minimum cherché correspond à  $\delta A = 0$  quel que soit  $\delta \rho$ , ce qui impose la condition (équation d'Euler-Lagrange) :  $\left( \frac{\partial L}{\partial \rho'} \right)' - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0$ .

• Cette équation peut aussi s'écrire sous une autre forme. En notant pour simplifier  $p = \frac{\partial L}{\partial \rho'}$  on obtient :  $dL = \frac{\partial L}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial L}{\partial \rho'} d\rho' = p' d\rho + p d\rho'$ .

Ainsi, en posant  $H = p \rho' - L$  (méthode de Hamilton) on aboutit à :

$$dH = d\left(\rho' \frac{\partial L}{\partial \rho'} - L\right) = 0.$$

### 3.3. Application au montage étudié

• On obtient dans ce cas :

$$\rho' \frac{\partial L}{\partial \rho'} - L = \frac{\rho \rho'^2}{\sqrt{1+\rho'^2}} - \rho \sqrt{1+\rho'^2} = - \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho'^2}} = -\rho_0 \text{ (constante).}$$

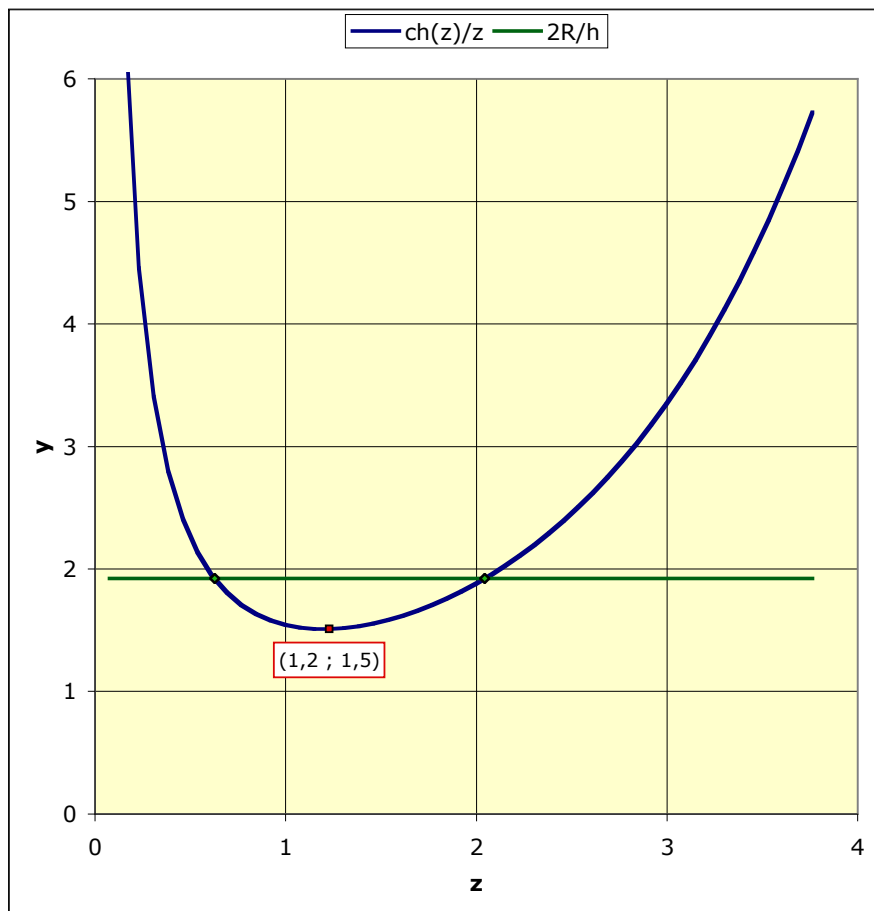
• Cette équation différentielle peut aussi s'écrire :  $dx = \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 - 1}}$  ; on en

déduit :  $\rho = \rho_0 \operatorname{ch}\left(\frac{x-x_0}{\rho_0}\right)$  où le décalage  $x_0$  est nul si l'origine est au centre.

♦ remarque : la surface correspondante est appelée “caténoïde”.

- On peut préciser la valeur  $\rho_0$  d'après la condition limite :  $R = \rho_0 \operatorname{ch}\left(\frac{h}{2\rho_0}\right)$ .

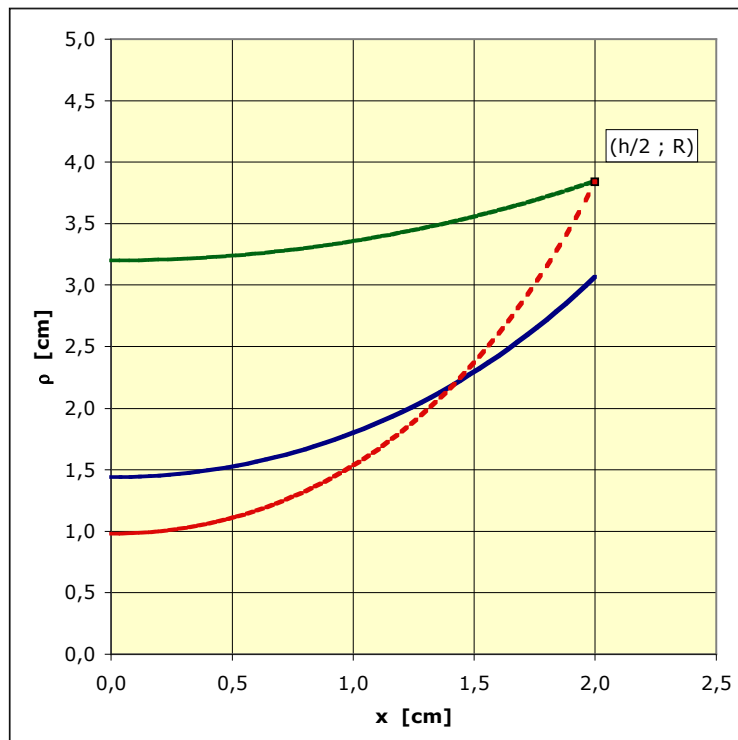
En notant  $y = \frac{2R}{h}$  et  $z = \frac{h}{2\rho_0}$  ceci s'écrit :  $y(z) = \frac{\operatorname{ch}(z)}{z}$  ; on constate alors que, pour un écartement  $h$  trop grand par rapport à  $R$ , il n'existe pas de solution (le film de savon éclate et se scinde en deux films sur les anneaux).



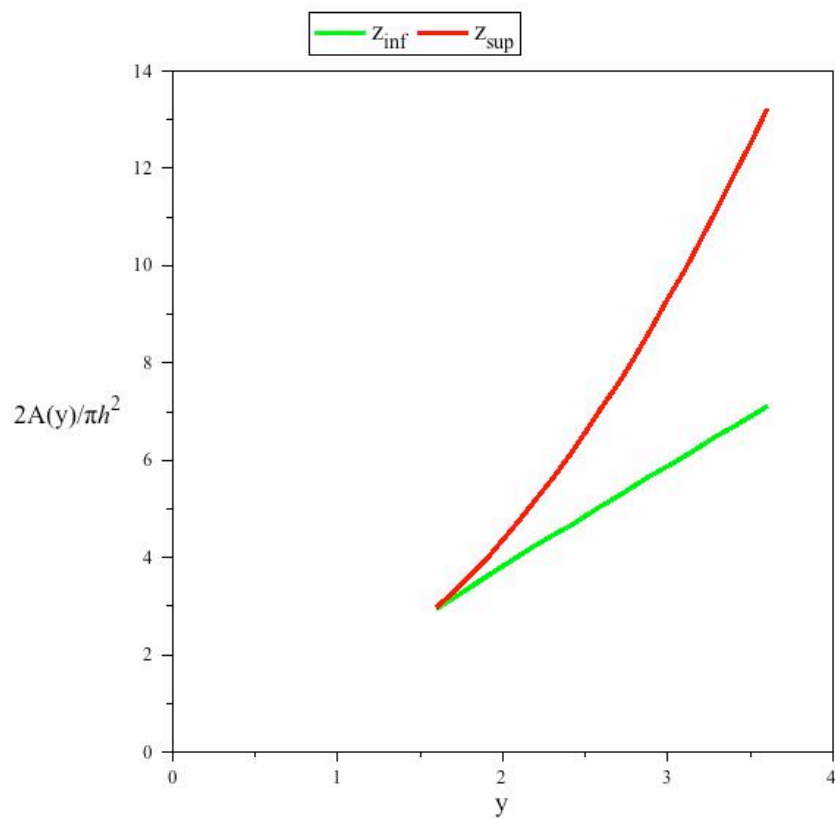
- Pour  $y$  assez grand ( $y > 1,5$ ), il existe deux solutions mathématiques. En traçant la courbe représentant le profil de la surface, on vérifie que la condition limite n'est respectée que pour ces deux cas.

La plus grande valeur de  $z$  correspond à la plus petite valeur de  $\rho_0$ . La longueur de la courbe représentant  $\rho = \rho(x)$  est alors plus grande, mais le périmètre autour de l'axe  $Ox$  est plus petit (et inversement) ; il n'est donc pas évident de savoir laquelle des deux aires est le minimum absolu.





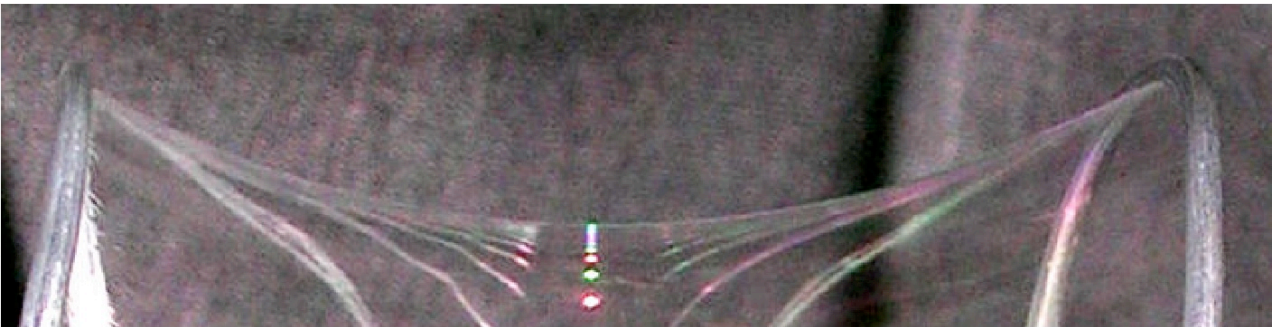
- L'expression de l'aire donne alors :  $A = \frac{\pi h^2}{2} \frac{\text{ch}(z)\text{sh}(z) + z}{z^2}$  ; on constate que l'aire minimale (plus stable) correspond à la plus grande valeur de  $\rho_0$ .



## 4. Expériences avec des films de savon

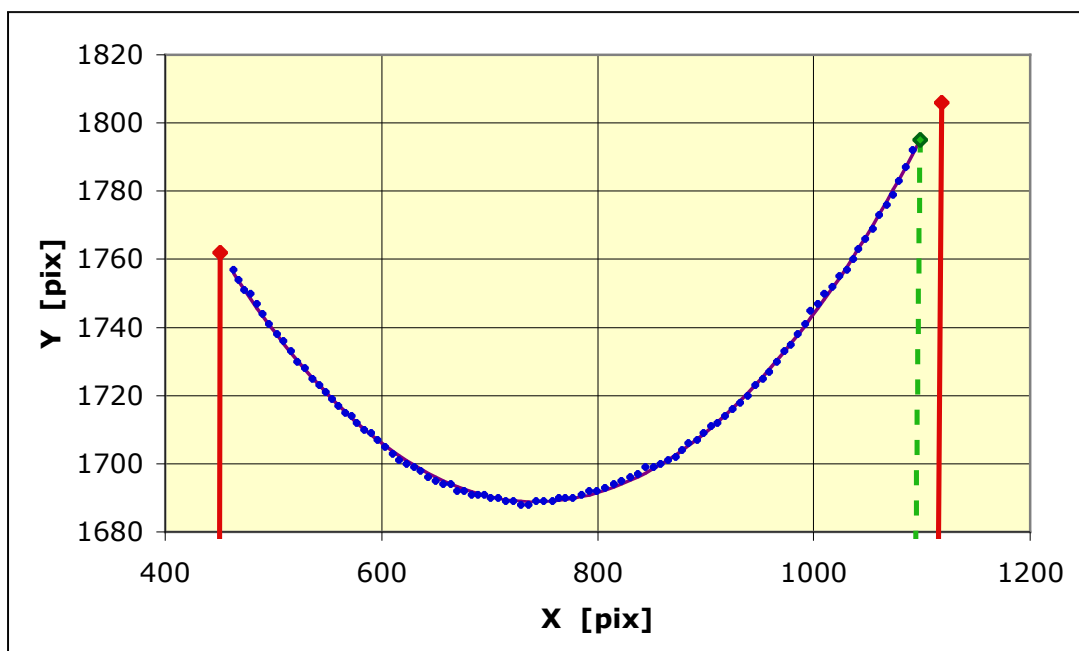
### 4.1. Numérisation

- La numérisation a été effectuée à l'aide du logiciel "Plot Digitizer" (ci-dessous, zoom sur la partie étudiée).

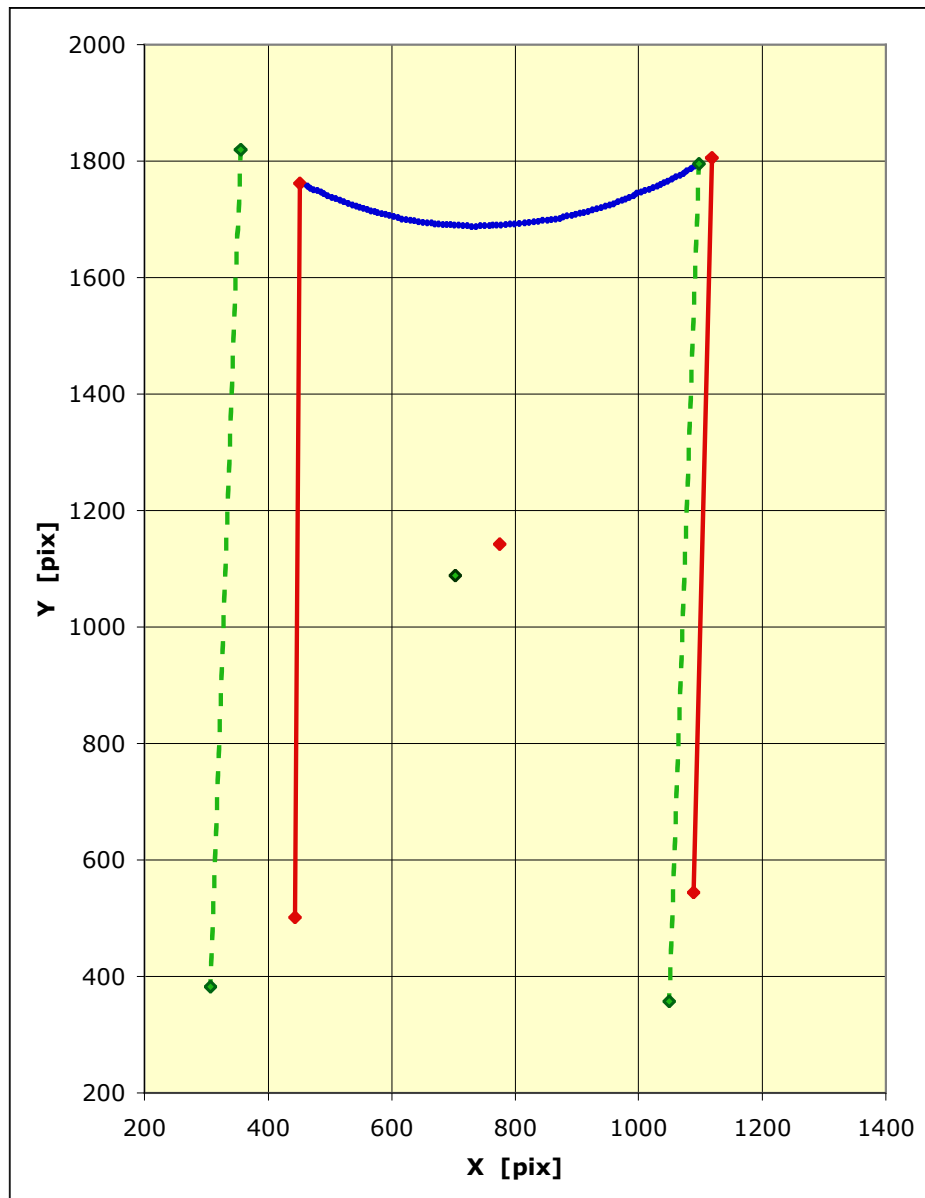


### 4.2. Exploitation

Le dispositif n'est pas idéal : les anneaux ne sont pas exactement circulaires (ni de même taille, ni même plans) et leurs axes sont un peu décalés. Les dimensions correspondent à  $h \approx 4 \text{ cm}$  mais la perspective, dans une photographie de près, ne donne pas une échelle uniforme. Les mesures sont donc exploitées directement en pixels (seules les proportions sont essentielles).



On obtient ainsi une courbe représentative de la forme  $r = \rho(x - x_1) - r_1$  où les constantes correspondent au décalage de l'origine (centre du dispositif), mais doivent aussi tenir compte d'une rotation possible des axes (l'ajustement des divers paramètres est obtenu par la méthode des moindres carrés).

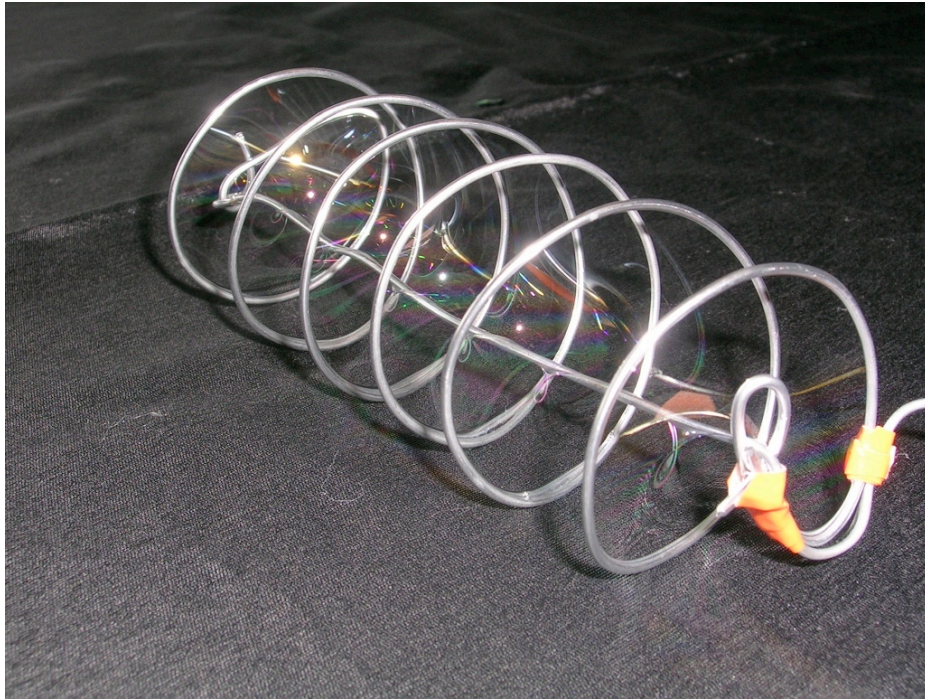


On constate que l'ajustement de la forme est satisfaisant. Il conduit par ailleurs à donner plus d'importance à l'orientation des anneaux qu'au décalage de leurs bords (les “anneaux” du modèle théorique ajusté auraient sinon un décalage angulaire de sens contraire).

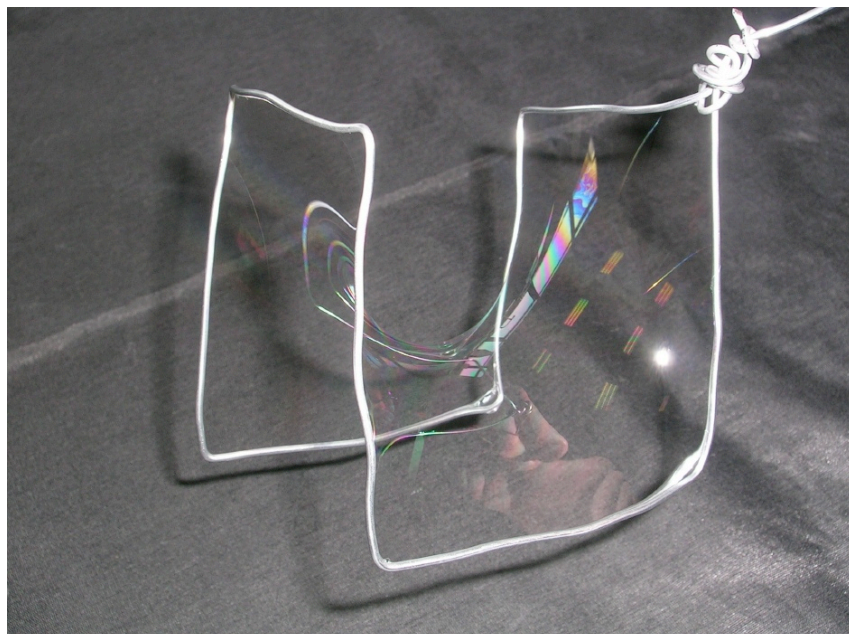


### 4.3. Autres exemples

- Il existe de nombreuses autres surfaces minimales ouvertes, par exemple l'hélicoïde (générée par une droite en rotation et translation le long d'une autre droite) :



Un autre cas est la surface de Sherk (générée par une courbe en ch en translation le long d'une autre courbe en ch) :



Il en existe bien d'autres encore...



... et puis évidemment...



... la caténoïde (allez, vous en reprendrez bien une petite dernière pour la route, non ?).

