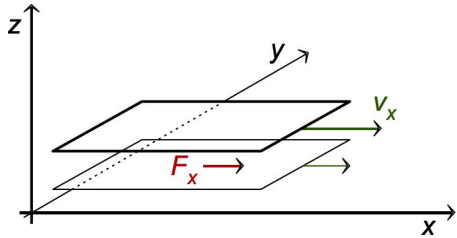


MF. II - VISCOSITÉ

1. Notion de viscosité

- Lorsque les différentes “couches” de fluide voisines ne circulent pas à la même vitesse, il peut se produire un transfert d'impulsion d'une couche à l'autre (la couche plus rapide tend à “entraîner” sa voisine).

Pour décrire cela, on peut raisonner localement avec un repère cartésien $Oxyz$ ayant l'axe Ox selon la vitesse au point considéré. La variation spatiale de la vitesse v_x peut être décrite par le gradient $\frac{dv_x}{dz}$.



Le transfert d'impulsion par unité de temps (force visqueuse) d'une couche plus rapide sur une voisine plus lente est proportionnel à la surface S de contact entre couches et au gradient de vitesse : $F_x = \eta S \frac{dv_x}{dz}$. Le coefficient η est nommé “viscosité”.

L'unité de mesure de base est $\text{Pa} \cdot \text{s}$; elle est égale à l'ancienne unité poiseuille (Pl) mais cette dernière dénomination est obsolète.

♦ remarque : il existe aussi une “viscosité de dilatation” (dont l'effet est normal et s'ajoute aux forces pressantes) mais elle est presque toujours négligeable ; c'est encore une approximation acceptable pour les fluides comme du miel très visqueux ; cela doit toutefois être pris en compte pour les fluides typiquement “non newtoniens” comme les peintures.

2. Expression volumique

- Dans les conditions considérées, une tranche de fluide de surface dS entre z et $z + dz$ est soumise par ses voisines à :

$$[F_x]_{(z+dz)} - [F_x]_{(z)} = \eta dS \cdot \left(\left[\frac{dv_x}{dz} \right]_{(z+dz)} - \left[\frac{dv_x}{dz} \right]_{(z)} \right) = \eta dS \frac{d^2 v_x}{dz^2} dz.$$

Pour le volume $dV = dS dz$ cela peut être décrit par une force volumique : $f_x = \eta \frac{d^2 v_x}{dz^2}$ et plus généralement avec le laplacien : $\vec{f} = \eta \Delta \vec{v}$.

3. Équation de Navier-Stokes

• En présence de viscosité, l'équation d'Euler peut s'écrire sous la forme de Navier-Stokes : $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v} + \frac{\delta \vec{F}}{\delta V}$ (avec par exemple $\frac{\delta \vec{F}}{\delta V} = \rho \vec{g}$ pour la pesanteur).

◊ remarque : avec un tenseur des contraintes σ^{ij} tel que la force surfacique totale soit $\vec{T} = \pm [\sigma] \vec{n}$ (où le signe est selon le sens du vecteur normal $\vec{n}$) on peut regrouper les termes de pression et de frottement visqueux.

4. Nombre de Reynolds

• Le “nombre de Reynolds” est une quantité sans dimension caractérisant le rapport entre l'énergie cinétique volumique du fluide et le travail de la force volumique visqueuse.

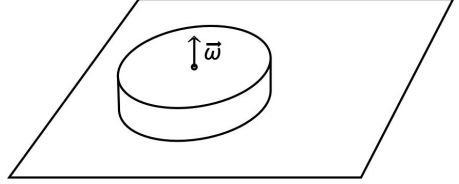
Soient $\mathcal{V}$ la vitesse caractéristique du fluide et L la dimension caractéristique du dispositif : $Re = \frac{\rho \mathcal{V} L}{\eta} = \frac{\rho \mathcal{V}^2}{(\eta \frac{\mathcal{V}}{L^2}) L}$.

Pour $Re \lesssim 1$ l'écoulement est normalement laminaire et pour $Re > 2000$ il est turbulent.

◊ remarque : l'évolution est progressive ; au delà de ≈ 10 apparaissent des décollements des lignes de courant faisant place à des tourbillons localisés (dans lesquels l'écoulement est laminaire) ; au delà de 100 il y a décollement des tourbillons qui deviennent mobiles (emportés par le courant) tout en restant organisés ; au delà de 1000 les turbulences deviennent de plus en plus chaotiques.

5. Exemple d'application : écoulement de Couette en rotation

• Une plaque solide cylindrique, dont la base a un rayon R , glisse sur un support horizontal avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ constante. Pour éviter le frottement solide, une épaisseur h de fluide lubrifiant de viscosité η est intercalée entre le solide et le support.



En considérant l'équilibre du fluide en régime laminaire permanent, on peut calculer la vitesse angulaire d'écoulement du fluide en fonction de la position (on néglige les "effets de bord"), avec $\vec{v}(r, \theta, z) = v_\theta(r, z) \vec{u}_\theta$.

◊ remarque : on omet ici l'influence de la pesanteur ; sa prise en compte ne fait qu'ajouter indépendamment les termes correspondants.

• Une tranche de fluide de dimension $(dr ; r d\theta ; dz)$ subit une force visqueuse volumique : $\vec{f} = \eta \Delta \vec{v}$. Le plus simple consiste alors à utiliser la propriété : $\Delta \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$.

• En coordonnées cylindriques on obtient ici :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 ;$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = -\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \vec{u}_r + \varphi(r) \vec{u}_z \text{ avec } \varphi(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) = \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} ;$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \vec{u}_r + \varphi(r) \vec{u}_z \right) = -\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \vec{u}_\theta - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{u}_\theta ;$$

$$\vec{f} = \eta \Delta \vec{v} = \eta \cdot \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) \right] \vec{u}_\theta .$$

La condition stationnaire impose la nullité du moment algébrique sur un anneau (dr, dz) donc : $m = r f = \eta r \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) v(r, z) = 0$.

◊ remarque : ici les forces pressantes ont un moment nul.

• Une difficulté semble subsister à ce niveau puisque l'équation unique devrait résoudre une double variation. Toutefois les symétries du dispositif sont telles que les variations selon r et z sont indépendantes (toutes les tranches dz ont le même comportement vis à vis de r) : $v(r, z) = \alpha(r) \beta(z)$.

Ceci permet une séparation des variables puisque les deux termes sont indépendants : $\frac{1}{\beta} \frac{d^2 \beta}{dz^2} = -\frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \alpha = \lambda = Cste$.

L'équation $\frac{d^2 \beta}{dz^2} - \lambda \beta = 0$ peut donner un sinus avec $\lambda < 0$ ou un sinus hyperbolique avec $\lambda > 0$ (la vitesse doit s'annuler pour $z = 0$) mais c'est physiquement anormal car les tranches dz se comportent toutes de même. Il faut donc ne garder que la variation affine avec $\lambda = 0$, ce qui est analogue au résultat obtenu pour un écoulement de Couette en mouvement rectiligne. Ainsi $\beta = \frac{z}{h}$ à une constante multiplicative près, qu'on inclut dans α .

L'équation $\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \alpha = 0$ donne alors le même résultat que sans variation en z :

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{\alpha}{r} \right) = 0 ; \quad \frac{d\alpha}{dr} + \frac{\alpha}{r} = A \text{ (constante)} ; \quad \frac{d}{dr} (r \alpha) = A r ;$$

$$r \alpha = \frac{1}{2} A r^2 + B ; \quad \alpha(r) = \frac{1}{2} A r + \frac{B}{r} .$$

La vitesse devant s'annuler pour $r = 0$ on obtient $B = 0$; elle doit donner $v = r \omega$ pour $z = h$ avec $\beta(h) = 1$ donc $\frac{1}{2} A = \omega$. Ainsi : $v(r, z) = \frac{z}{h} \omega r$.

◇ remarque : ceci signifie que les tranches horizontales tournent simplement à la vitesse angulaire $\omega' = \frac{z}{h} \omega$.

• La force exercée sur une surface $dS = dr r d\theta$ de la plaque en rotation est alors : $dF_\theta = -\eta dS \frac{dv}{dz} = -\eta dr r d\theta \frac{r}{h} \omega$ (ici dans le sens résistant) donnant au total un moment algébrique : $\mathcal{M} = -\frac{\eta \omega}{h} 2\pi \int_0^R r^3 dr = -\frac{\pi \eta \omega}{2h} R^4$ qui doit être compensé pour l'entretien du mouvement.



exercices n° I, II, III, IV, V et VI.