VISCOSITÉ - corrigé des exercices

I. Frottement d'un solide en translation

1. • L'invariance par translation fait qu'on peut considérer que tout le mouvement se fait dans la direction et le sens de $\vec{V}$, qu'on peut repérer par un axe Ox. La direction transversale dans l'épaisseur de la couche de fluide peut être repérée par un axe Oz. Le problème se ramène ainsi à trouver v(z) dans le fluide.

◊ remarque : ce type de mouvement du fluide est nommé “écoulement de Couette” (ici plan).

• Une tranche de fluide de surface horizontale dS, comprise entre z et $z + dz$ est soumise à des forces visqueuses algébriques (selon Ox) : $dF(z + dz) = \eta\ \vec{\nabla}v(z + dz)\cdot\overrightarrow{dS}(z + dz) = \eta\ \frac{\partial v}{\partial z}(z + dz)\ dS$ et de même $-dF(z) = -\eta\ \frac{\partial v}{\partial z}(z)\ dS$ (action réciproque de celle exercée sur la tranche au dessous).

• On en tire la “condition d'équilibre” (mouvement uniforme) : $\frac{\partial v}{\partial z}(z + dz) - \frac{\partial v}{\partial z}(z) = 0$.

◊ remarque : la condition peut aussi s'écrire à partir de la force volumique : $f = \eta\ \Delta v = \eta\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$.

• Compte tenu de $v(0) = 0$ et $v(h) = V$, la variation affine impose : $v(z) = \frac{z}{h}V$.

2. • On en déduit le “gradient” : $\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{V}{h}$ puis la force qu'on doit exercer sur le solide pour compenser le frottement du fluide : $\vec{F} = \eta\ \frac{S}{h}\ \vec{V}$.

◊ remarque : la limite infinie quand $h \rightarrow 0$ doit être interprétée avec circonspection ; c'est un frottement solide qui s'applique dans ce cas.

II. Frottement d'un solide en rotation

1.a. • L'invariance par rotation et par translation selon l'axe (si on néglige les effets de bord) fait qu'on peut considérer que tout le mouvement se fait dans la direction et le sens de $\overrightarrow{u_\theta}$ en coordonnées cylindriques. Le problème se ramène ainsi à trouver la variation radiale de v(r) ou de $\dot{\theta}(r)$ dans le fluide.

◊ remarque : ce type de mouvement du fluide est nommé “écoulement de Couette” (ici cylindrique en rotation).

• Une tranche de fluide de dimension (dr ; r dθ ; dz) subit une force visqueuse volumique : $\vec{f} = \eta\ \Delta\vec{v}$.

◊ remarque : il faut ne pas confondre : $\vec{f} = \eta\ \Delta\vec{v} = \eta\ \Delta(v(r)\overrightarrow{u_\theta}(\theta)) \neq \eta\ \Delta v(r)\ \overrightarrow{u_\theta}$.

• Une première méthode consiste à utiliser la propriété : $\Delta\vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})$.

• En coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0\ ;$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\overrightarrow{u_z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_\theta)\ \overrightarrow{u_z} = \varphi(r)\ \overrightarrow{u_z}\ ;$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\ \overrightarrow{u_\theta}\ ;\ \vec{f} = \eta\ \Delta\vec{v} = \eta\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_\theta)\right)\ \overrightarrow{u_\theta}.$$

◊ remarque : l'accélération centripète associée à la rotation est imposée par les forces pressantes.

• Le moment volumique algébrique est ainsi, en régime stationnaire : $m = r.f = \eta\ r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_\theta)\right) = 0$.

• Cette relation impose : $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_\theta) = A$; $r\,v_\theta = \frac{1}{2}Ar^2 + B$; $v(r) = A'\,r + \frac{B}{r}$ (en simplifiant $A' = \frac{1}{2}A$).

• Les conditions aux limites imposent :

$v(R_2) = 0$ donc $B = -A' R_2^2$;

$v(R_1) = \omega_1 R_1$ donc $A' = \dfrac{\omega_1 R_1^2}{R_1^2 - R_2^2}$ et finalement : $v(r) = \omega_1\, r\, \dfrac{\left(\dfrac{R_2^2}{r^2} - 1\right)}{\left(\dfrac{R_2^2}{R_1^2} - 1\right)}$.

1.b. • Une deuxième méthode consiste à faire un détour par les coordonnées cartésiennes, pour lesquelles le calcul du laplacien d'un champ vectoriel se ramène à des laplaciens de champs scalaires (car les vecteurs unitaires sont des constantes) : $\Delta\vec{v} = \Delta v_x\, \overrightarrow{u_x} + \Delta v_y\, \overrightarrow{u_y} + \Delta v_z\, \overrightarrow{u_z}$.

• On obtient ainsi :

$$\Delta v_x = \Delta(-v(r)\sin(\theta)) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)(-v(r)\sin(\theta)) \;;$$

$$\Delta v_x = -\sin(\theta)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)v(r) - v(r)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\sin(\theta) = -\sin(\theta)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)v(r) \;;$$

$$\Delta v_y = \Delta(v(r)\cos(\theta)) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)(v(r)\cos(\theta)) \;;$$

$$\Delta v_y = \cos(\theta)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)v(r) + v(r)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\cos(\theta) = \cos(\theta)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)v(r) \;;$$

$$\Delta\vec{v} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)v(r)\;\left(-\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_y}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)v(r)\;\overrightarrow{u_\theta}.$$

◊ remarque : l'invariance par rotation fait qu'on peut simplifier le calcul en considérant un cas particulier puis en réinterprétant le résultat ; par exemple : $\theta = 0$; $\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{u_r}(0)$; $\overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{u_\theta}(0)$.

◊ remarque : on peut utiliser d'avantage les coordonnées cartésiennes (mais ce n'est pas très approprié) : $r = \sqrt{x^2+y^2}$; $\cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\sin(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$...

• Ceci aboutit donc à : $\vec{f} = \eta\,\Delta\vec{v} = \eta\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{1}{r^2}\right)v(r)\;\overrightarrow{u_\theta}$.

• Le moment volumique algébrique est ainsi : $\mathcal{m} = r.f = \eta\, r\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{1}{r^2}\right)v(r) = 0$.

• Cette relation impose (on vérifie le résultat précédent) :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right) = 0 \;;\; \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = A \;;\; \frac{\partial}{\partial r}(r\,v) = A\,r \;;$$

$$r\,v = \frac{1}{2}Ar^2 + B \;;\; v(r) = A'\,r + \frac{B}{r} \quad \text{(en simplifiant } A' = \tfrac{1}{2}A\text{).}$$

1.c. • Une troisième méthode consiste à étudier une tranche de fluide de surface latérale dS (cylindre), comprise entre r et $r + dr$ est soumise à des forces visqueuses algébriques (selon $\overrightarrow{u_\theta}$) :

$dF(r + dr) = \eta\,\left[\vec{\nabla}\right]_{rel} v(r + dr)\boldsymbol{\cdot}\overrightarrow{dS}(r + dr)$ avec $\overrightarrow{dS}(r + dr) = dS(r + dr)\,\overrightarrow{u_r}$;

$-dF(r) = -\eta\,\left[\vec{\nabla}\right]_{rel} v(r)\boldsymbol{\cdot}\overrightarrow{dS}(r)$ (réciproque de celle sur la tranche intérieure), avec $\overrightarrow{dS}(r) = r.d\theta.dz\,\overrightarrow{u_r}$.

• AInsi : $dF(r + dr) = \eta\left[\dfrac{\partial v}{\partial r}\right]_{rel}(r + dr)\,dS(r + dr)$; $-dF(r) = -\eta\left[\dfrac{\partial v}{\partial r}\right]_{rel}(r)\,dS(r)$.

• Il est toutefois important ici de comprendre que le gradient doit être considéré dans le référentiel tournant correspondant : si l'ensemble du fluide tournait avec la même vitesse angulaire ω, il n'y aurait pas de frottement visqueux. C'est le mouvement angulaire relatif des tranches qui importe (et non le fait que pour ω donné la vitesse est proportionnelle à r) : $v = r\,\omega$; $\left[\dfrac{\partial v}{\partial r}\right]_{rel} = r\dfrac{\partial \omega}{\partial r} = r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v}{r}\right) = \dfrac{\partial v}{\partial r} - \omega$.

• Ceci donne : $dF(r + dr) = \eta \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\right](r + dr)\ (r + dr)^2.d\theta.dz$; $-dF(r) = -\eta \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\right](r)\ r^2.d\theta.dz$.

• Les moments (algébriques) donnent ainsi la “condition d'équilibre” (rotation uniforme) :

$$d\mathcal{M}(r + dr) = \eta.(r + dr)^3.\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\right](r + dr)\ d\theta.dz \ ; \quad d\mathcal{M}(r) = \eta.r^3.\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\right](r)\ d\theta.dz \ ;$$

$$(r + dr)^3.\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\right](r + dr) - r^3.\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\right](r) = 0.$$

• La relation précédente impose la forme : $\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\right](r) = \frac{A}{r^3}$, donc $\frac{v(r)}{r} = -\frac{A}{2r^2} + B$. Compte tenu de $v(R_1) = \omega_1 R_1$ et $v(R_2) = 0$, on obtient finalement : $v(r) = \omega_1\, r\, \frac{\left(\frac{R_2^2}{r^2} - 1\right)}{\left(\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1\right)}$.

2. • On en déduit le “gradient” : $\left[\frac{\partial v}{\partial r}\right]_{rel} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right) = -2\omega_1 \frac{\left(\frac{R_2^2}{r^2}\right)}{\left(\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1\right)}$ (le plus simple est selon la troisième méthode). Le moment qu'on doit exercer sur le solide pour compenser le frottement du fluide est ainsi :

$$\vec{\mathcal{M}} = -\eta \left[\frac{\partial v}{\partial r}\right]_{rel}(R_1)\ 2\pi R_1 H\ R_1\ \vec{u_z} = \eta\ \omega_1 R_1 \frac{\left(\frac{R_2^2}{R_1^2} + 1\right)}{\left(\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1\right)}\ 2\pi R_1 H\ \vec{u_z} = \eta\ 4\pi H \frac{R_1^2 R_2^2}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)}\ \vec{\omega_1}.$$

◊ remarque : la limite infinie quand $R_1 \rightarrow R_2$ doit être interprétée avec circonspection ; c'est un frottement solide qui s'applique dans ce cas.

III. Frottement d'un cylindre en translation

1. • L'invariance par rotation et par translation selon l'axe (si on néglige les effets de bord) fait qu'on peut considérer que tout le mouvement se fait dans la direction et le sens de $\vec{u_z}$ en coordonnées cylindriques. Le problème se ramène ainsi à trouver la variation radiale de v(r) ou de $z^{\bullet}(r)$ dans le fluide.

◊ remarque : ce type de mouvement du fluide est nommé “écoulement de Couette” (ici cylindrique en translation).

• Une tranche de fluide de dimension (dr ; r dθ ; dz) subit une force visqueuse volumique : $\vec{f} = \eta\ \Delta\vec{v}$.

◊ remarque : dans ce cas : $\vec{f} = \eta\ \Delta\vec{v} = \eta\ \Delta(v(r)\vec{u_z}) = \eta\ \Delta v(r)\ \vec{u_z} = \eta\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\ \vec{u_z}$.

• Une méthode consiste à utiliser la propriété : $\Delta\vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})$.

• En coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \ ;$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\vec{u_r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\vec{u_z} = -\frac{\partial v_z}{\partial r}\ \vec{u_\theta} \ ;$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\ \vec{u_z} \ ; \quad \vec{f} = \eta\ \Delta\vec{v} = \eta\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\ \vec{u_z}.$$

• On en tire la “condition d'équilibre” (mouvement uniforme) : $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) = 0$.

• Cette relation correspond à : $\dfrac{\partial v}{\partial r} = \dfrac{A}{r}$; $v(r) = A \ln(r) + B$.

• Les conditions aux limites imposent :

$v(R_2) = 0$ donc $B = -A \ln(R_2)$;

$v(R_1) = V$ donc $A = \dfrac{V}{\ln\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)}$ et finalement : $v(r) = V \dfrac{\ln\left(\dfrac{R_2}{r}\right)}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}$.

2. • On en déduit le “gradient” : $\dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{V}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)} \dfrac{1}{r}$ puis la force qu'on doit exercer sur le solide pour compenser le frottement du fluide : $\vec{F} = \eta \dfrac{2\pi H}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)} \vec{V}$.

◊ remarque : la limite infinie quand $R_1 \rightarrow R_2$ doit être interprétée avec circonspection ; c'est un frottement solide qui s'applique dans ce cas.

IV. Écoulement d'un fluide entre deux cylindres coaxiaux

1. • L'invariance par rotation et par translation selon l'axe (si on néglige les effets de bord) fait qu'on peut considérer que tout le mouvement se fait dans la direction et le sens de $\overrightarrow{u_z}$ en coordonnées cylindriques. Le problème se ramène ainsi à trouver la variation radiale de v(r) ou de $z^{\bullet}(r)$ dans le fluide.

◊ remarque : ce type de mouvement du fluide est nommé “écoulement de Poiseuille” (ici cylindrique en translation).

• Une tranche de fluide de dimension (dr ; r dθ ; dz) subit une force visqueuse volumique :

$$\vec{f} = \eta \, \Delta\vec{v} = \eta \, \Delta(v(r)\,\overrightarrow{u_z}) = \eta \, \Delta v(r) \, \overrightarrow{u_z} = \eta \, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \overrightarrow{u_z}.$$

• La force de viscosité totale sur un “tube de courant” de section dr.rdθ peut s'écrire (en norme) sous la forme : $H.dr.rd\theta \, \eta \, \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right)$. Elle doit être compensée par une résultante des forces pressantes : $dr.rd\theta \, \Delta p$. On en tire la “condition d'équilibre” (mouvement uniforme) : $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) = \dfrac{\Delta p}{H\eta}$.

◊ remarque : l'énoncé suggère implicitement l'hypothèse que Δp est uniforme sur toute la section.

• Cette relation correspond à : $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) = \dfrac{\Delta p}{H\eta} r$; $\dfrac{\partial v}{\partial r} = \dfrac{\Delta p}{2H\eta} r + \dfrac{A}{r}$; $v(r) = \dfrac{\Delta p}{4H\eta} r^2 + A \ln(r) + B$.

• Les conditions aux limites imposent :

$v(R_2) = 0$ donc $B = -\dfrac{\Delta p}{4H\eta} R_2^2 - A \ln(R_2)$;

$v(R_1) = 0$ donc $A = \dfrac{\Delta p}{4H\eta} \dfrac{R_2^2 - R_1^2}{\ln\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)}$;

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{4H\eta}(R_2^2 - r^2) + \frac{\Delta p}{4H\eta}(R_2^2 - R_1^2) \frac{\ln\left(\dfrac{R_2}{r}\right)}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}.$$

◊ remarque : l'écoulement est de sens contraire à Δp.

2. • Après moult simplifications, on en déduit le débit :

$$D = \iint v(r)\, dr\, r d\theta = -\frac{\pi\, \Delta p}{8H\eta}\ (R_2^4 - R_1^4) + \frac{\pi\, \Delta p}{8H\eta}\ \frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

V. Écoulement d'un fluide entre deux cylindres coaxiaux

1. • L'invariance par rotation et par translation selon l'axe (si on néglige les effets de bord) fait qu'on peut considérer que tout le mouvement se fait dans la direction et le sens de $\overrightarrow{u_z}$ en coordonnées cylindriques. Le problème se ramène ainsi à trouver la variation radiale de v(r) ou de z•(r) dans le fluide.

◊ remarque : si vous cherchez comment se nomme ce type de mouvement du fluide et que vous ne trouvez pas d'autre nom, vous pouvez le nommer “écoulement de Laffaille” (ici cylindrique en translation).

• Une tranche de fluide de dimension (dr ; r dθ ; dz) subit une force visqueuse volumique :

$$\vec{f} = \eta\, \Delta \vec{v} = \eta\, \Delta(v(r)\, \overrightarrow{u_z}) = \eta\, \Delta v(r)\ \overrightarrow{u_z} = \eta\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\ \overrightarrow{u_z}.$$

• La force de viscosité totale sur un “tube de courant” de section dr.rdθ peut s'écrire (en norme) sous la forme : $H.dr.rd\theta\ \eta\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$. Elle doit être compensée par une résultante des forces pressantes : dr.rdθ Δp. On en tire la “condition d'équilibre” (mouvement uniforme) : $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{\Delta p}{H\eta}$.

◊ remarque : l'énoncé suggère implicitement l'hypothèse que Δp est uniforme sur toute la section.

• Cette relation correspond à : $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{\Delta p}{H\eta}\ r$; $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\Delta p}{2H\eta}\ r + \frac{A}{r}$; $v(r) = \frac{\Delta p}{4H\eta}\ r^2 + A \ln(r) + B$.

• Les conditions aux limites imposent :

$$v(R_2) = 0 \quad \text{donc} \quad B = -\frac{\Delta p}{4H\eta}\ R_2^2 - A \ln(R_2)\ ;$$

$$v(R_1) = V \quad \text{donc} \quad A = \frac{V - \frac{\Delta p}{4H\eta}\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}\ ;$$

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{4H\eta}\ (R_2^2 - r^2) + \left(V + \frac{\Delta p}{4H\eta}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\right)\ \frac{\ln\left(\frac{R_2}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

◊ remarque : l'écoulement global est de sens contraire à Δp.

2. • Après moult simplifications, on en déduit le débit :

$$D = \iint v(r)\, dr\, r d\theta = -\pi V\, R_1^2 + \frac{\pi V}{2}\ \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} - \frac{\pi\, \Delta p}{8H\eta}\ (R_2^4 - R_1^4) + \frac{\pi\, \Delta p}{8H\eta}\ \frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

• Mais ce débit est imposé par le déplacement : $D = -\pi V\, R_1^2$; par conséquent :

$$\Delta p = \frac{4H\eta\, V}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\left(R_1^2 + R_2^2\right) - \left(R_2^2 - R_1^2\right)}.$$

3. • D'après ce qui précède, on peut simplifier : $v(r) = V \dfrac{\ln\left(\frac{R_2}{r}\right)\left(R_1{}^2 + R_2{}^2\right) - \left(R_2{}^2 - r^2\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\left(R_1{}^2 + R_2{}^2\right) - \left(R_2{}^2 - R_1{}^2\right)}$.

• On en déduit le “gradient” : $\dfrac{\partial v}{\partial r} = -V \dfrac{\frac{1}{r}\left(R_1{}^2 + R_2{}^2\right) - 2r}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\left(R_1{}^2 + R_2{}^2\right) - \left(R_2{}^2 - R_1{}^2\right)}$.

• Sans oublier la contribution $\pi R_1{}^2 \Delta p$ des forces pressantes sur les bases, on obtient la force qu'on doit exercer sur le solide pour compenser le frottement du fluide : $\vec{F} = \eta \dfrac{2\pi H}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{R_2{}^2 - R_1{}^2}{R_1{}^2 + R_2{}^2}} \vec{V}$.

◊ remarque : la limite infinie quand $R_1 \to R_2$ doit être interprétée avec circonspection ; non seulement c'est un frottement solide qui s'applique dans ce cas, mais l'écoulement du fluide incompressible devient impossible (et même avant cela le régime devient turbulent).