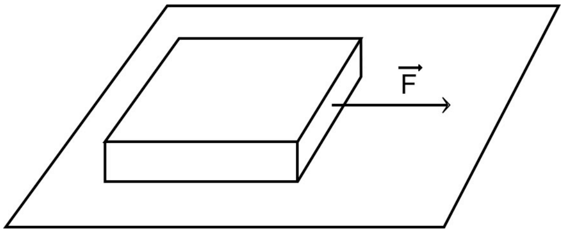
VISCOSITÉ - exercices

I. Frottement d'un solide en translation

• Une plaque solide parallélépipédique, de surface de base S, glisse sur un support horizontal avec une vitesse $\vec{V}$ constante. Pour éviter le frottement solide, une couche de fluide lubrifiant d'épaisseur h et de viscosité η est intercalée entre le solide et le support.

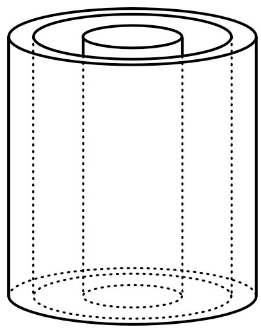


1. • En considérant l'équilibre du fluide en régime laminaire permanent, calculer la vitesse d'écoulement du fluide en fonction de la position (on néglige les “effets de bord”).

2. • En déduire la force $\vec{F}$ nécessaire pour maintenir la vitesse de glissement constante du solide.

II. Frottement d'un solide en rotation

• Un cylindre solide d'axe vertical, de rayon R_1 et de hauteur H, tourne avec une vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega_1}$ constante. Ce cylindre est placé (selon le même axe vertical) dans un tube fixe de rayon R_2 et de hauteur H, rempli d'un fluide de viscosité η.



1. • En considérant l'équilibre du fluide en régime laminaire permanent, calculer la vitesse angulaire d'écoulement du fluide en fonction de la position (on néglige les “effets de bord”).

2. • En déduire le moment de force nécessaire pour maintenir la vitesse angulaire constante du solide.

☞ indication : en coordonnées cylindriques :

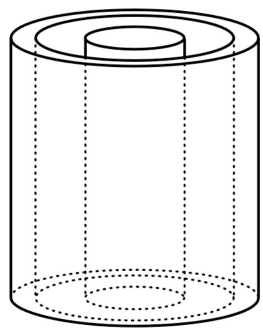
$$\Delta v = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v \ ;$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) \ ;$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \ ;$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z} .$$

III. Frottement d'un cylindre en translation



• Un cylindre solide d'axe vertical, de rayon R_1 et de hauteur H, est placé (selon le même axe vertical) dans un tube fixe de rayon R_2, rempli d'un fluide de viscosité η. Le cylindre central se déplace parallèlement à l'axe avec une vitesse $\vec{V}$ constante.

1. • En considérant l'équilibre du fluide en régime laminaire permanent, calculer la vitesse d'écoulement du fluide en fonction de la position (on néglige les “effets de bord”).

2. • En déduire la force $\vec{F}$ nécessaire pour maintenir la vitesse de translation constante du cylindre.

☞ indication : en coordonnées cylindriques :

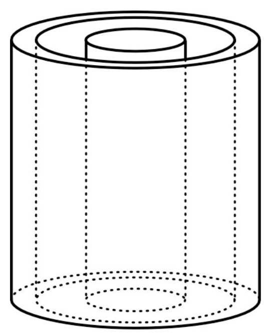
$$\Delta v = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v \ ;$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) \ ;$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \ ;$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\vec{u_r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\vec{u_z}.$$

IV. Écoulement d'un fluide entre deux cylindres coaxiaux



• Un cylindre solide d'axe vertical, de rayon R_1 et de hauteur H, est placé (selon le même axe vertical) dans un tube fixe de rayon R_2, rempli d'un fluide de viscosité η.

• Le fluide se déplace parallèlement à l'axe avec un débit volumique D constant. Cet écoulement est entretenu par une différence de pression Δp entre les deux extrémités du dispositif.

☞ remarque : la surpression Δp s'ajoute simplement à celle qui compense la pesanteur ; les deux phénomènes s'ajoutant sans s'influencer, on peut ici simplifier en omettant la description de la pesanteur.

1. • En considérant l'équilibre du fluide en régime laminaire permanent, calculer la vitesse d'écoulement du fluide en fonction de la position (on néglige les “effets de bord”).

2. • En déduire le débit D.

☞ indication : en coordonnées cylindriques :

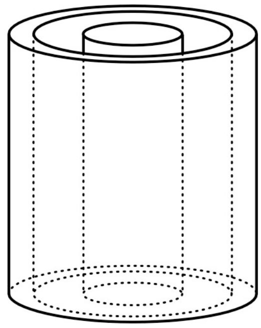
$$\Delta v = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v \ ;$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) \ ;$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \ ;$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\vec{u_r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\vec{u_z}.$$

V. Frottement d'un cylindre en translation



• Un cylindre solide d'axe vertical, de rayon R_1 et de hauteur H, est placé (selon le même axe vertical) dans un tube fixe de rayon R_2, rempli d'un fluide de viscosité η. Le cylindre central se déplace parallèlement à l'axe avec une vitesse $\vec{V}$ constante.

• Le fond du tube étant fermé, le fluide se déplace parallèlement à l'axe avec un débit volumique D constant (par exemple, le fluide remonte sur les côtés si le cylindre descend). Cet écoulement est entretenu par une différence de pression Δp entre les deux extrémités du cylindre.

☞ remarque : la surpression Δp s'ajoute simplement à celle qui compense la pesanteur ; les deux phénomènes s'ajoutant sans s'influencer, on peut ici simplifier en omettant la description de la pesanteur.

1. • En considérant l'équilibre du fluide en régime laminaire permanent, calculer la vitesse d'écoulement du fluide en fonction de la position (on néglige les “effets de bord”).

2. • En déduire le débit D et la surpression Δp.

3. • En déduire la force $\vec{F}$ nécessaire pour maintenir la vitesse de translation constante du cylindre.

☞ indication : en coordonnées cylindriques :

$$\Delta v = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v \ ;$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) \ ;$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \ ;$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z} \, .$$