aog - OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

1. Équation de l'eikonale

• On considère un milieu transparent non magnétique, inhomogène mais isotrope, d'indice de réfraction $n(M)$ indépendant du temps t (milieu constant) et de la longueur d'onde λ (milieu non dispersif).

Dans la limite où la dimension du dispositif étudié est très supérieure à la longueur d'onde (limite $\lambda \approx 0$) la propagation de chaque composante F du champ électromagnétique d'une onde est régie par l'équation de d'Alembert : $\Delta F - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$.

◊ remarque : en fait plus précisément $\Delta\vec{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla}\left(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}(\ln(n^2))\right)$ pour le champ électrique et $\Delta\vec{B} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{B}\times\vec{\nabla}(\ln(n^2))\right)$ pour le champ magnétique, mais les seconds membres de ces équations sont négligeables dans la limite considérée.

• On en cherche alors une solution quasi-monochromatique sous la forme $F(M,t) = a(M,t)\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi(M,t)}$ où l'amplitude a et la phase φ sont réelles.

Pour une onde quasi-monochromatique on peut considérer une pulsation $\omega = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ et écrire ainsi : $\varphi(M,t) = -\omega\, t + \frac{\omega}{c}\,\psi(M)$ où la quantité $\psi(M)$ est nommée “eikonale”.

• En reportant dans l'équation on obtient :

$$\Delta F = \left[\Delta a - \frac{\omega^2}{c^2}\,a\,.\left(\vec{\nabla}\psi\right)^2 + \mathrm{i}\,\frac{\omega}{c}\left(a\,\Delta\psi + 2\,\vec{\nabla}a\cdot\vec{\nabla}\psi\right)\right]\exp\left(-\mathrm{i}\,\omega\,t + \mathrm{i}\,\frac{\omega}{c}\,\psi\right);$$

$$\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{n^2}{c^2}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2\,\mathrm{i}\,\omega\,\frac{\partial a}{\partial t} - \omega^2\,a\right)\exp\left(-\mathrm{i}\,\omega\,t + \mathrm{i}\,\frac{\omega}{c}\,\psi\right).$$

La partie imaginaire donne : $a\,\Delta\psi + 2\,\vec{\nabla}a\cdot\vec{\nabla}\psi + 2\,\frac{n^2}{c}\frac{\partial a}{\partial t} = 0$, ce qui peut s'écrire sous la forme : $\vec{\nabla}\cdot\left(a^2\,\vec{\nabla}\psi\right) + \frac{n^2}{c}\frac{\partial(a^2)}{\partial t} = 0$. Cette relation est liée au vecteur de Poynting et traduit la conservation de l'énergie moyenne du champ électromagnétique.

La partie réelle donne : $\Delta a - \frac{\omega^2}{c^2}\, a\,.\left(\vec{\nabla}\psi\right)^2 + \frac{n^2}{c^2}\left(\omega^2\, a - \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}\right) = 0$, mais les variations temporelles de l'amplitude a sont négligeables en comparaison de celles de l'eikonale ψ ; on peut pour cela penser à un train d'onde, dont la durée est très supérieure à la période d'oscillation. On peut ainsi considérer : $\Delta a + \frac{\omega^2}{c^2}\, a\,.\left(n^2 - \left(\vec{\nabla}\psi\right)^2\right) = 0$.

En considérant alors que $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide, si les variations considérées sont dans un domaine de dimension L on peut considérer $\frac{\omega^2}{c^2}\left|\frac{a}{\Delta a}\right| \approx \left(\frac{2\pi\, L}{\lambda_0}\right)^2$ négligeable dans la limite étudiée. L'équation se limite donc à : $\left(\vec{\nabla}\psi\right)^2 = n^2$ (équation de l'eikonale) ; cela constitue l'approximation de l'optique géométrique.

• On peut alors utiliser : $\psi(M) = \psi_0 + \vec{\nabla}\psi \cdot \overrightarrow{OM}$ et $\vec{\nabla}\psi = n\,\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire selon la propagation.

Ainsi : $\varphi(M,t) = \frac{\omega}{c}\left(\psi_0 + \vec{\nabla}\psi \cdot \overrightarrow{OM}\right) - \omega\, t = \varphi_0 + \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega\, t$ avec un vecteur d'onde $\vec{k} = \vec{\nabla}\varphi = \frac{\omega}{c} n\,\vec{u}$.

2. Principe de Fermat

• Dans le cadre de l'optique géométrique, on cherche le trajet d'un rayon lumineux entre deux points M_1 et M_2 .

Pour un déplacement infinitésimal, la phase varie de : $d\varphi = \vec{k} \cdot d\overrightarrow{OM} - \omega\, dt$ donc au total : $\varphi(M_2,t_2) - \varphi(M_1,t_1) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{k} \cdot d\overrightarrow{OM} - \omega\,.(t_2 - t_1)$.

De façon analogue au principe d'action stationnaire, on considère ici que ce déphasage est stationnaire lorsqu'on varie le trajet entre les deux limites fixées : $\delta\left(\int_{M_1}^{M_2} \vec{k} \cdot d\overrightarrow{OM}\right) = \frac{\omega}{c}\,\delta\left(\int_{M_1}^{M_2} n\,\vec{u} \cdot d\overrightarrow{OM}\right) = \frac{\omega}{c}\,\delta\left(\int_{M_1}^{M_2} n\, d\ell\right) = 0$.

La quantité $\int n\, d\ell$ est nommée “chemin optique” et mesure la durée de propagation puisque $\int_{M_1}^{M_2} n\, d\ell = c\, \int_{M_1}^{M_2} \frac{d\ell}{v_\varphi} = c\, \int_{M_1}^{M_2} dt$; le principe de Fermat revient donc à minimiser cette durée de propagation.

◊ remarque : il est utile de remarquer que l'intervalle $t_2 - t_1$ intervenant dans la variation $\Delta\varphi$, bien que sans influence puisque considéré comme constant, ne peut en fait pas être choisi arbitrairement puisqu'il se déduit du calcul ; ceci suggère de considérer t aussi comme une coordonnée, ce qui mène au raisonnement relativiste.

3. Formulation hamiltonienne de l'optique géométrique

• En choisissant de paramétrer par t , on peut écrire :

$$\int_{M_1}^{M_2} n\, d\ell = \int_{M_1}^{M_2} n(x_i) \sqrt{\sum \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2}\; dt \;\; ; \;\; \mathcal{L}(x_i\,, \dot{x}_i\,, t) = n(x_i) \sqrt{\sum \dot{x}_i{}^2}\;.$$

On en déduit les moments conjugués : $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{n}{\sqrt{\sum \dot{x}_i{}^2}}\, \dot{x}_i$.

Le hamiltonien est alors dans ce cas : $\mathcal{H} = \sum(p_i\, \dot{x}_i) - \mathcal{L} = n \sqrt{\sum \dot{x}_i{}^2} - \mathcal{L} = 0$.

On en déduit pour l'action $\mathcal{S}$:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = -\mathcal{H} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_i} = p_i \;\; ; \;\; \left(\vec{\nabla}\mathcal{S}\right)^2 = n^2$$ (équation de l'eikonale).

• Cette description utilise les notations hamiltoniennes pour leur aspect mathématique mais n'utilise pas l'analogie avec leur utilisation physique pour la mécanique newtonienne du point matériel. On peut alors préférer une écriture plus complète (respectant une unité $\mathrm{J}.s$ pour l'action) en partant du fait que le terme temporel a été simplifié dans le raisonnement précédent :

$$\frac{\hbar\omega}{c} \int_{M_1}^{M_2} n\, d\ell = \frac{\hbar\omega}{c} \int_{M_1}^{M_2} n\, d\ell - \hbar\omega \int_{M_1}^{M_2} dt = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\hbar\omega}{c} \left(n(x_i) \sqrt{\sum \dot{x}_i{}^2} - c \right) dt \;\; ;$$

$$\mathcal{L}(x_i\,, \dot{x}_i\,, t) = \frac{\hbar\omega}{c} n(x_i) \sqrt{\sum \dot{x}_i{}^2} - \hbar\omega \;\; ; \;\; p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\hbar\omega}{c} \frac{n}{\sqrt{\sum \dot{x}_i{}^2}}\, \dot{x}_i \;\; ;$$

$$\mathcal{H} = \sum(p_i\, \dot{x}_i) - \mathcal{L} = \frac{\hbar\omega}{c} n \sqrt{\sum \dot{x}_i{}^2} - \mathcal{L} = \hbar\omega \;\; ;$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = -\mathcal{H} = -\hbar\omega \;\; ; \;\; \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_i} = p_i \;\; ; \;\; \left(\vec{\nabla}\mathcal{S}\right)^2 = \left(\frac{\hbar\omega}{c}\, n\right)^2 .$$