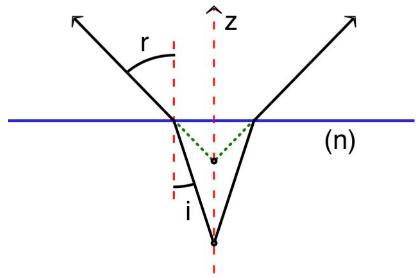
RÉFRACTION - corrigé des exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Pêche au harpon



a. • Ne sachant pas exactement où se situe le pêcheur par rapport au poisson, on suppose qu'il est au voisinage de la verticale et on raisonne dans l'approximation des petits angles (même si ceux-ci sont exagérés sur le schéma pour le rendre plus lisible).

• La symétrie par rapport à la verticale, pour des rayon émis par un point objet quelconque, permet de conclure que le point image correspondant est sur la même verticale.

• Soit H la profondeur du point objet, et soit h la profondeur du point image, les relations trigonométriques donnent :

$$H \tan(i) = h \tan(r).$$

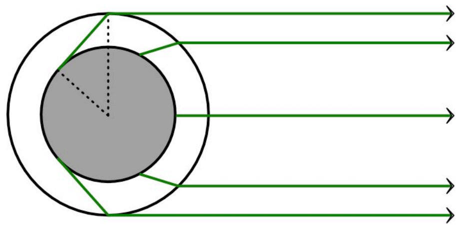
• La loi de la réfraction donne par ailleurs : $n \sin(i) = \sin(r)$, donc pour des petits angles : $h \approx \frac{H}{n}$.

• Un poisson situé à une profondeur $H = 20$ cm semble donc situé à la profondeur : $h \approx 15$ cm. Le fond de la rivière situé à une profondeur $H' = 50$ cm semble de même situé à la profondeur : $h' \approx 37{,}5$ cm.

b. • Le pêcheur doit lancer son harpon un peu au dessous de l'endroit où il le voit.

II. Thermomètre à mercure

• L'observateur très éloigné reçoit un faisceau lumineux quasi parallèle. Si le mercure lui semble remplir tout le tube, c'est que les rayons lui arrivant en passant par le bord (tangentiellement) proviennent du mercure (après réfraction à la limite du verre). Si on se place dans le cas limite de la valeur de r permettant cette configuration, c'est que ces rayons proviennent plus précisément du bord du mercure (tangentiellement). Il ne reste alors qu'à constater la propriété géométrique correspondante, déduite de la loi de la réfraction : $n \sin(i) = \sin(r) = 1$; ce qui donne : $\sin(i) = \frac{r}{R} = \frac{1}{n}$ et donc $r = \frac{R}{n}$.

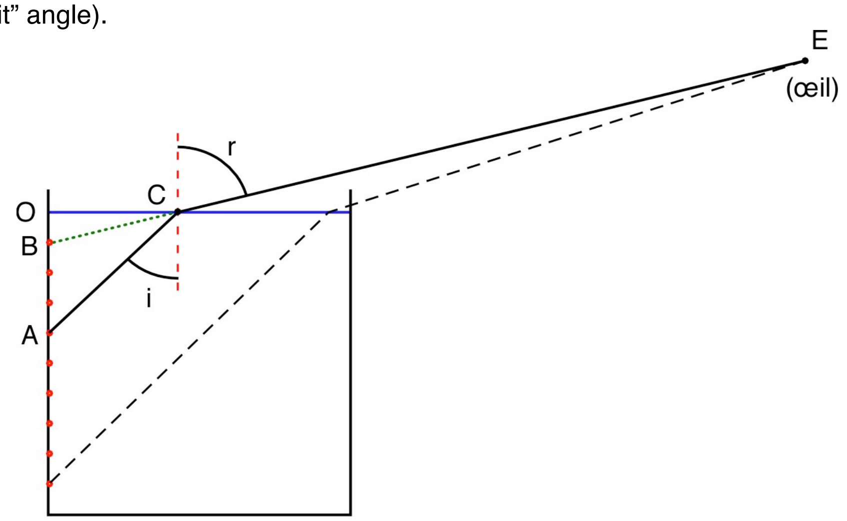


B. EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

III. Échelle dans un aquarium

1. • La hauteur au dessus de l'eau étant nettement inférieure à la distance horizontale (par rapport à la face arrière de l'aquarium), les rayons ne peuvent atteindre l'œil en passant par la surface de l'eau qu'avec de grands angles.

• Soit y_E = 10 cm la hauteur de l'œil au dessus de la surface de l'eau (avec un repère d'origine O), la distance horizontale minimum $(x_E - x_C)_{min}$ = 30 cm à laquelle il se trouve du point d'incidence le plus proche possible caractérise l'angle de réfraction minimum : $\tan(r_{min}) = \frac{(x_E - x_C)_{min}}{y_E} = 3$. On en tire : $r_{min} \approx 72°$ (très loin d'un “petit” angle).



2. • Un rayon issu d'un barreau à la profondeur $-y_A$ et traversant la surface à une distance x_C de l'échelle correspond à un angle d'incidence tel que : $\tan(i) = -\frac{x_C}{y_A}$.

• La distance horizontale $x_E - x_C$ à laquelle l'œil se trouve du point d'incidence caractérise l'angle de réfraction : $\tan(r) = \frac{x_E - x_C}{y_E}$.

• La distance horizontale de l'œil à l'échelle est par ailleurs : $x_E = y_E \tan(r) - y_A \tan(i)$ = 50 cm, ou la loi de la réfraction impose : $n \sin(i) = \sin(r)$.

• La résolution numérique de ce système de deux équations trigonométriques permet de trouver i et r puis d'en déduire $x_C = -y_A.\tan(i)$; $y_B = -\frac{x_C}{\tan(r)}$ et les autres quantités cherchées.

◊ remarque : pour chaque y_A, il y a plusieurs solutions (dont des complexes) mais une seule solution réelle donnant x_C dans l'intervalle [0 ; x_E].

◊ remarque : pour les logiciels moins efficaces en trigonométrie, mais performants en algèbre, la loi de la réfraction peut s'écrire : $n^2 \frac{\tan^2(i)}{1+\tan^2(i)} = \frac{\tan^2(r)}{1+\tan^2(r)}$, d'où on tire : $n^2 \frac{{x_C}^2}{{x_C}^2 + {y_A}^2} = \frac{(x_E - x_C)^2}{(x_E - x_C)^2 + {y_E}^2}$ qu'on peut résoudre en x_C ; on en tire ensuite $y_B = y_E . \frac{x_C}{x_E - x_C}$ et les autres quantités cherchées.

• On obtient ainsi pour les différents barreaux :

$-y_A$ (cm)	2	4	6	8	10	12	14	16	18
x_C (cm)	2,17	4,33	6,46	8,57	10,64	12,68	14,67	16,61	18,50
$-y_B$ (cm)	0,45	0,95	1,48	2,07	2,70	3,40	4,15	4,98	5,87
$\rho = y_B/y_A$	0,227	0,237	0,247	0,258	0,270	0,283	0,297	0,311	0,326
$x_{A'}$ (cm)	1,98	3,90	5,76	7,55	9,27	10,88	12,39	13,77	15,02

• On constate que le rapport $\rho = \frac{y_B}{y_A}$ est nettement inférieur à la valeur $\frac{1}{n}$ = 0,75 correspondant à la limite des petits angles (en vision plus “rasante”, l'échelle est vue très “tassée”) ; par exemple, le quatrième barreau est vu environ dans la position où se trouve le premier.

• On constate par ailleurs que tous les barreaux sont effectivement visibles à travers la surface de l'eau (mais ceux du bas sont probablement vus à travers la partie de vitre qui surplombe la surface de l'eau).

3.a. • Pour trouver la position du point image d'un point donné, il faut chercher l'intersection des rayons image voisins du rayon correspondant au tracé précédent (il faut raisonner avec un faisceau lumineux, étroit mais non limité à un unique rayon).

• Plus précisément, la largeur du faisceau reçu par un œil est insuffisante pour donner une bonne estimation du relief (sauf éventuellement pour un objet très proche) ; c'est l'association des deux yeux qui permet d'intercepter des rayons suffisamment décalés.

• Madame Xlbtz ayant les deux yeux à la même hauteur, son cerveau analyse le relief d'après la différence horizontale des différents rayons. Or le faisceau étudié est constitué de rayons contenus dans des plans verticaux, donc non déviés horizontalement : madame Xlbtz ne verra donc aucune modification du relief et percevra l'échelle comme raccourcie mais verticale.

3.b. • Au contraire, monsieur Xlbtz ayant les deux yeux à la verticale l'un de l'autre, son cerveau analyse le relief d'après la différence verticale des différents rayons. Pour trouver la position du point image du barreau, il faut donc chercher l'intersection des rayons image passant par y'_E légèrement différent.

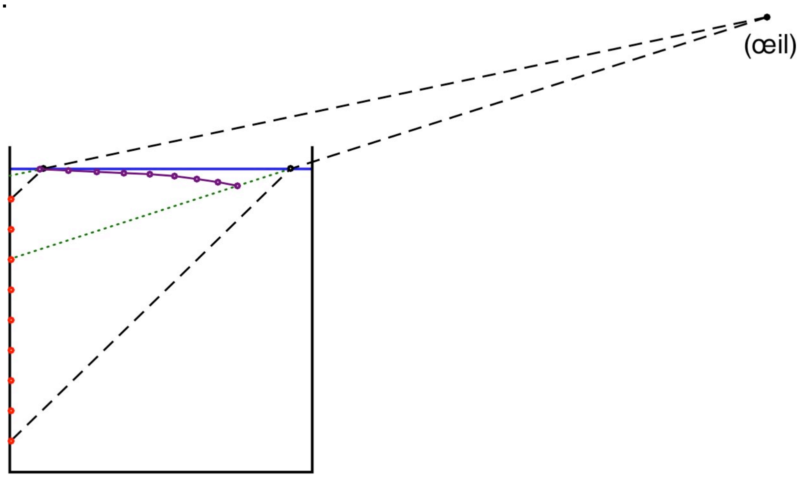
• L'équation d'un rayon réfracté peut s'écrire : $y = \frac{x - x_C}{\tan(r)}$ avec $x_C = -y_A \tan(i)$.

• La recherche du point image A’, intersection des rayons réfractés, correspond donc à chercher (x, y) fixés appartenant à tous les rayons voisins de celui étudié précédemment, pour des valeurs légèrement différentes de i et r (et donc de x_C) vérifiant : $n \sin(i) = \sin(r)$. Ainsi :

$$dx = 0 \quad ; \quad dy = 0 = \frac{\partial y}{\partial i} di + \frac{\partial y}{\partial r} dr = y_A \frac{1+\tan^2(i)}{\tan(r)} di - (x - x_C) \frac{1+\tan^2(r)}{\tan^2(r)} dr \quad ; \quad \cos(r)\, dr = n \cos(i)\, di.$$

• En combinant et en simplifiant, on obtient : $x_{A'} = x_C \cdot \left(1 - \frac{\cos^2(r)}{\cos^2(i)}\right)$; ceci redonne effectivement $x_{A'} \approx 0$ dans l'approximation des petits angles.

• Dans le cas considéré ici, par contre, il pourrait a priori sembler que le mieux soit de considérer le cas du barreau le plus haut : les angles les plus grands correspondent en effet au maximum du facteur $1 - \frac{\cos^2(r)}{\cos^2(i)} = 1 - n^2\rho^2$. Cela correspond toutefois à la distance x_C minimum et le décalage $x_{A'}$ = 2,0 cm est relativement modéré.



• Au contraire, pour le barreau le plus bas, le décalage est maximum : $x_{A'}$ = 15,0 cm. En réalité, l'échelle est vue très “tassée” surtout par effet de perspective : elle est vue très oblique.

◊ remarque : l'image de l'échelle n'est pas exactement rectiligne et les images des barreaux ne sont pas espacées exactement régulièrement.

◊ remarque : cette situation où les convergences horizontale et verticale sont différentes est un cas d'astigmatisme, mais... hélas, monsieur Xlbtz n'a rien vu : il s'est endormi.

IV. Interprétation corpusculaire de la lumière

1.a. • D'après la symétrie du milieu (indépendamment des photons réfractés), la direction mise en évidence est la normale à la surface de séparation.

1.b. • Si on suppose qu'une force normale à la surface agit sur les photons lors de leur traversée, elle ne modifie pas la composante v_x de la vitesse. Pour diminuer l'angle, la force doit augmenter v_z, donc elle doit augmenter la vitesse.

◊ remarque : c'est contraire à l'expérience, car la vitesse de la lumière diminue quand l'indice optique augmente, mais cette vitesse était trop grande pour être mesurée à l'époque.

2.a. • La force correspond à : $F = m\,\dfrac{v_{2z} - v_{1z}}{\delta t}$.

2.b. • Le théorème de l'énergie cinétique donne : $\delta W = F.\delta z = \frac{1}{2}m.(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m.(v_{2z}^2 - v_{1z}^2)$.

2.c. • La comparaison des deux relations précédentes donne : $\delta z = \frac{1}{2}(v_{2z} + v_{1z})\,\delta t = \langle v_z \rangle\,\delta t$.

◊ remarque : en fait l'hypothèse d'une force constante ne décrit de même qu'un effet “en moyenne”.

2.d. • Les relations précédentes correspondent à : $F = \dfrac{E_{c1}}{\delta z}.(n^2 - 1)$ avec $E_{c1} = \frac{1}{2}mv_1^2$.

2.e. • Il faut que l'épaisseur de la zone d'interaction soit proportionnelle à l'énergie cinétique des photons incidents.

V. Interprétation corpusculaire de la lumière

1.a. • D'après la symétrie de l'expérience, la direction mise en évidence est celle du plan d'incidence (contenant la normale et la direction incidente).

1.b. • Si on suppose qu'une force parallèle à la surface agit sur les photons lors de leur traversée, elle ne modifie pas la composante v_z de la vitesse. Pour diminuer l'angle, la force doit diminuer v_x, donc elle doit diminuer la vitesse.

◊ remarque : c'est conforme à l'expérience, car la vitesse de la lumière diminue quand l'indice optique augmente, mais cette vitesse était trop grande pour être mesurée à l'époque.

2.a. • La force correspond à : $F = m\,\dfrac{v_{1x} - v_{2x}}{\delta t}$ (en norme, car $F_x < 0$ dans le cas étudié).

2.b. • On peut proposer de considérer $(n_2 - n_1)\,\vec{u_z} \times (\vec{u_z} \times \vec{v_1}) = -(n_2 - n_1)\,v_{1x}\vec{u_x}$ qui possède l'orientation correcte ; il semble toutefois difficile de faire mieux.