OSCILLATEURS - corrigé des exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Suspension des voitures

• La période des oscillations du dispositif de suspension (plus ou moins amorties par le dispositif amortisseur) est de l'ordre de grandeur de celle des oscillations propres : $T \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$. La raideur du dispositif de suspension est donc : $k \approx \frac{4\pi^2 M}{T^2} \approx 9.10^4 \text{ N.m}^{-1}$.

• L'abaissement d'une voiture, lorsqu'on y introduit une malle de masse $m = 70 \text{ kg}$, est par conséquent : $h = \frac{m\,g}{k} \approx 7{,}5 \text{ mm}$.

• Pour un camion, dont la charge est beaucoup plus grande, l'abaissement ne peut pas être exagérément augmenté ; il faut donc une raideur d'autant plus grande. Pour que la période des oscillations soit la même, il faudrait donc que la masse du camion soit augmentée dans les mêmes proportions que sa charge ; or ceci ne serait pas rentable.

• La raideur et l'abaissement imposant un rapport $\frac{m}{M}$ plus grand, la période des oscillations est plus petite et le camion est moins confortable (les passagers ont la sensation d'être "secoués").

II. Conditions aux limites

1. • La pulsation est : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 3{,}14 \text{ rad.s}^{-1}$.

• Sachant que la vitesse initiale est positive, la position lors de la première annulation de la vitesse correspond à l'abscisse maximale (avec $\omega_0\,t_1 + \varphi = 0$) : $x_1 = X_m\,\cos(\omega_0\,t_1 + \varphi) = X_m = 0{,}5 \text{ m}$.

• L'expression proposée correspond à : $\dot{x} = -\omega_0\,X_m\,\sin(\omega_0\,t + \varphi)$.

• En particulier : $\dot{x}(0) = -\omega_0\,X_m\,\sin(\varphi)$; $\sin(\varphi) = -\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0\,X_m} = -0{,}637$; $\varphi = -0{,}690 \text{ rad} = -39{,}5°$.

2. • L'expression proposée correspond à : $x(t) = X_m\,\cos(\varphi)\,\cos(\omega_0\,t) - X_m\,\sin(\varphi)\,\sin(\omega_0\,t)$.

• En particulier : $A = X_m\,\cos(\varphi) = 0{,}386 \text{ m}$; $B = -\,X_m\,\sin(\varphi) = 0{,}318 \text{ m}$.

III. Associations de ressorts

a. • Les forces verticales (poids et réaction de la tige) se compensent ; on peut donc se limiter à une étude algébrique selon l'axe Ox horizontal.

• Le mobile est soumis à la traction du ressort de droite ; l'équilibre (traction nulle) correspond donc à la position "à vide" de ce ressort. En outre, les actions réciproques entre les deux ressorts sont opposées ; elles s'annulent donc en même temps et l'équilibre correspond aussi à la position "à vide" du ressort de gauche. En notant $x_1 = \ell_1 - \ell_{01}$ et $x_2 = \ell_2 - \ell_{02}$ les allongements des deux ressorts, l'écart du mobile de masse m par rapport à l'équilibre est donc : $x = x_1 + x_2$.

• L'équation du mouvement correspond à : $m\,\ddot{x} = -k_2\,x_2$ avec x_2 tel que : $k_1\,x_1 = k_2\,x_2$ (actions réciproques). On en déduit : $x = x_1 + x_2 = x_2\,.\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)$ et finalement : $m\,\ddot{x} = -K\,x$ avec $K = \frac{k_1\,k_2}{k_1 + k_2}$.

• Ceci correspond à un mouvement sinusoïdal de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$.

b. • Les forces verticales (poids et réaction de la tige) se compensent ; on peut donc se limiter à une étude algébrique selon l'axe Ox horizontal.

• Le mobile est soumis à la traction des deux ressorts ; l'équilibre (somme des tractions nulle) ne correspond pas à la position "à vide", mais à l'égalité (en norme) des deux tractions : $k_1\,\xi_{e1} = k_2\,\xi_{e2}$ (en notant $\xi_1 = \ell_1 - \ell_{01}$ et $\xi_2 = \ell_2 - \ell_{02}$ les allongements des deux ressorts).

• En outre, la longueur totale est constante ; c'est-à-dire qu'en choisissant l'origine à l'équilibre et en notant x le déplacement du mobile par rapport à l'équilibre, on obtient : $\xi_1 = \xi_{e1} + x$ et $\xi_2 = \xi_{e2} - x$.

• L'équation du mouvement correspond à : $m\,\ddot{x} = k_2\,\xi_2 - k_1\,\xi_1 = -(k_1+k_2)\,x + (k_2\,\xi_{e2} - k_1\,\xi_{e1})$; donc finalement : $m\,\ddot{x} = -K\,x$ avec $K = k_1 + k_2$.

• Ceci correspond à un mouvement sinusoïdal de période $T = 2\pi\,\sqrt{\frac{m}{K}}$.

c. • Les forces verticales (poids et réaction de la tige) se compensent ; on peut donc se limiter à une étude algébrique selon l'axe Ox horizontal.
• Le mobile est soumis à la traction des deux ressorts ; l'équilibre ne correspond pas à la position “à vide” des ressort, mais à une somme nulle des tractions : $k_1\,.(\ell_e - \ell_{01}) + k_2\,.(\ell_e - \ell_{02}) = 0$ (les deux ressorts ont même longueur et, à l'équilibre, l'un des ressorts est étiré et l'autre est comprimé).
• Avec l'origine à l'équilibre, en notant x le déplacement par rapport à l'équilibre $(\ell = \ell_e + x)$, l'équation du mouvement s'écrit :
$$m\,\ddot{x} = -k_1\,.(\ell - \ell_{01}) - k_2\,.(\ell - \ell_{02}) = -(k_1+k_2)\,x - [k_1\,.(\ell_e - \ell_{01}) + k_2\,.(\ell_e - \ell_{02})] \;;$$
donc finalement : $m\,\ddot{x} = -K\,x$ avec $K = k_1 + k_2$.

• Ceci correspond à un mouvement sinusoïdal de période $T = 2\pi\,\sqrt{\frac{m}{K}}$.

B. EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

IV. Grandes oscillations du pendule pesant

1. • En développant $\sin(\theta)$ jusqu'au premier terme non nul suivant l'ordre 1, c'est-à-dire à l'ordre 3, on obtient : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta - \omega_0^2\,\frac{\theta^3}{6} \approx 0$.

2. • Si on cherche une solution approchée sous la forme : $\theta = \theta_0\,[\sin(\omega\,t) + \varepsilon\,\sin(3\omega\,t)]$ avec $\varepsilon \ll 1$, on obtient (à l'ordre 1 en ε) :
$$0 \approx \theta_0\,\sin(\omega\,t)\,[\omega_0^2 - \omega^2] + \varepsilon\,\theta_0\,\sin(3\omega\,t)\,[\omega_0^2 - 9\,\omega^2]\cdots$$
$$\cdots - \omega_0^2\,\frac{\theta_0^3}{6}\,[\sin^3(\omega\,t) + 3\varepsilon\,\sin(3\omega\,t)\,\sin^2(\omega\,t)]\,.$$
• On peut alors utiliser les relations trigonométriques :
$$\sin^3(\omega\,t) = \frac{3}{4}\,\sin(\omega\,t) - \frac{1}{4}\,\sin(3\omega\,t)\;;$$
$$\sin(3\omega\,t)\,\sin^2(\omega\,t) = -\frac{1}{4}\,\sin(\omega\,t) + \frac{1}{2}\,\sin(3\omega\,t) - \frac{1}{4}\,\sin(5\omega\,t)\,.$$
• Ceci donne :
$$0 \approx \sin(\omega\,t)\,\left[\omega_0^2 - \omega^2 - \omega_0^2\,\frac{\theta_0^2}{8} + \varepsilon\,\omega_0^2\,\frac{\theta_0^2}{8}\right]\cdots$$
$$\cdots + \sin(3\omega\,t)\,\left[\varepsilon\,\omega_0^2 - 9\varepsilon\,\omega^2 + \omega_0^2\,\frac{\theta_0^2}{24} - \varepsilon\,\omega_0^2\,\frac{\theta_0^2}{4}\right] + \sin(5\omega\,t)\,\left[\varepsilon\,\omega_0^2\,\frac{\theta_0^2}{8}\right]\cdots\,.$$
• Le développement en série d'harmoniques a pour terme principal celui en $\sin(\omega\,t)$ (“fondamental”), et pour terme suivant celui en $\sin(3\omega\,t)$, avec un coefficient ε petit : il tend vers zéro quand l'amplitude θ_0 tend vers zéro (isochronisme des petites oscillations). En fait, ceci est un développement en fonction des puissances de θ_0 et on n'utilise la notation temporaire ε que parce qu'on ignore initialement l'ordre du terme suivant. Ainsi on doit négliger le terme en $\sin(5\omega\,t)$ dans la dernière équation et cela pour trois raisons qui ont la même origine (l'ordre du développement) :
◊ on n'a pas pris en compte de terme de la forme $\varepsilon'\,\sin(5\omega\,t)$ dans l'expression de θ pour décrire l'ordre suivant du développement ;
◊ le coefficient de $\sin(5\omega\,t)$ dans la dernière équation est d'ordre $\varepsilon\,\theta_0^2$ supérieur aux autres termes à l'ordre de développement traités ;
◊ on n'a pas pris en compte de terme en θ^5 dans le développement limité de $\sin(\theta)$.
• Pour que le développement soit nul pour tout t, il faut et il suffit que chaque coefficient soit nul. Le premier terme donne donc, à l'ordre le plus bas en θ_0 : $\omega^2 = \omega_0^2\,\left[1 - \frac{\theta_0^2}{8}(1-\varepsilon)\right] \approx \omega_0^2\,\left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right)$ c'est-à-dire : $T \approx T_0\,\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$.

3. • Le second terme donne de même, à l'ordre le plus bas en θ_0 : $\varepsilon = \frac{\theta_0^2}{92 - 21\,\theta_0^2} \approx \frac{\theta_0^2}{92}$. Ceci justifie que ε décrit un terme petit intervenant dans le développement en puissances de θ_0 ; ceci justifie donc de même d'avoir négligé les termes en $\varepsilon\,\theta_0^2$ en comparaison de ε et θ_0^2.

◊ remarque : on aurait pu négliger plus tôt dans le calcul le terme $\omega_0^2 \, \frac{\theta_0^3}{6} \, [3\varepsilon \, \sin(3\omega \, t) \, \sin^2(\omega \, t)]$ qui ne pouvait qu'être d'ordre supérieur à celui du présent calcul (pour les mêmes raisons) ; il est toutefois intéressant de n'effectuer l'approximation qu'un peu plus loin, car cela permet de se rendre compte que ce terme introduit automatiquement un terme en $\sin(5\omega \, t)$ dans le développement harmonique.