sp. II - PROPAGATION DES SIGNAUX

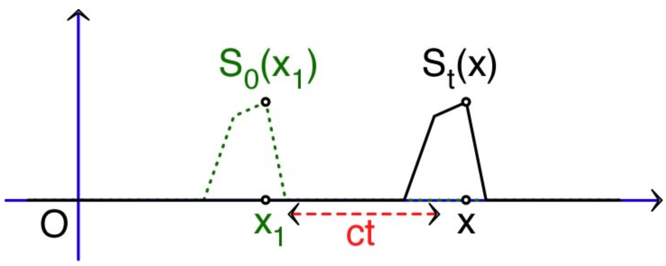
1. Propagation d'un signal

• Les “ondes” (ondes progressives) sont des signaux qui se déplacent dans l'espace en fonction du temps (sans déplacement global de matière).

Dans les milieux non dispersifs, toutes les composantes de Fourier se déplacent à la même vitesse, donc de même pour un signal quelconque, dont la forme reste inchangée lors de la propagation.

◊ remarque : sur les plages, la propagation des vagues est dispersive ; les ondes de plus haute fréquence se déplacent plus vite, c'est ce qui cause le déferlement des vagues (le sommet avance plus vite que la base).

• Considérons un signal dépendant de la position x (une seule coordonnée) et qui, à l'instant initial, peut s'écrire sous la forme $S_0(x) = f(x)$. Supposons que le signal se propage sans déformation ni amortissement.



Soit c la “célérité” (vitesse de propagation) d'un signal, alors à un instant $t > 0$ on doit retrouver en $x = x_1 + c\,t$ la même valeur du signal initial en x_1 :

$$S_t(x) = S_0(x_1) = f(x - c\,t) .$$

La mesure du retard dû à la propagation d'un signal donne la célérité :

$$f(x_1 - c\,t_1) = f(x_2 - c\,t_2) \quad ; \quad c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} .$$

◊ remarque : si le signal se propage à la célérité c mais dans l'autre sens (célérité algébrique $-c$) on obtient de même : $S_t(x) = S_0(x_1) = f(x + c\,t)$.

• On peut inversement s'intéresser à l'évolution dans le temps pour une abscisse fixée : $S_x(t) = f(x \mp c\, t) = g\left(t \mp \frac{x}{c}\right)$.

• Pour un signal sinusoïdal, on peut par exemple écrire, avec une période T, une longueur d'onde (“période spatiale”) $\lambda = c\,T$ et où la constante φ (déphasage) dépend du choix des origines pour t et x :

$$S(x,t) = S_{max}\ \cos\left(2\pi.\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right) = S_{max}\ \cos(\omega\, t - k\, x + \varphi)\ .$$

◊ remarque : la pulsation est $\omega = 2\pi\, F = \frac{2\pi}{T}$ (avec la fréquence $F = \frac{1}{T}$) ; on peut aussi définir un “vecteur d'onde” $\vec{k}$ orienté comme la propagation et tel que $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$.

2. Ondes stationnaires

• Le “pincement” d'une corde de guitare (ou de Melde) cause la propagation de deux signaux progressifs dans les deux sens. Aux extrémités, l'énergie des signaux est peu absorbée : ils sont réfléchis car le support s'oppose au mouvement et cette réaction crée une onde opposée qui se propage dans l'autre sens. L'effet résultant est une superposition “continuelle” de signaux se propageant dans les deux sens.

• D'après le principe de décomposition de Fourier, on peut étudier la réflexion à l'origine en considérant la superposition de deux signaux sinusoïdaux de même amplitude :

$$S(x,t) = S_{max}\ \cos(\omega\, t + k\, x + \varphi_{-}) + S_{max}\ \cos(\omega\, t - k\, x + \varphi_{-} + \pi)\ ;$$
$$S(x,t) = 2\, S_{max}\ \cos\left(\omega\, t + \varphi_{-} + \frac{\pi}{2}\right)\ \cos\left(k\, x + \frac{\pi}{2}\right)\ .$$

On obtient bien ainsi l'immobilité de la corde $\forall\, t$ pour $x = 0$, mais au voisinage le signal résultant semble “osciller sur place” en fonction de t, avec une amplitude qui dépend de x (les dépendances en t et x sont séparées). On nomme cela “ondes stationnaires” (sans propagation apparente).

Les positions où l'onde stationnaire est nulle sont appelées “nœuds” ; celles où l'amplitude est maximale sont nommées “ventres” d'oscillation. L'écart entre deux nœuds, ou entre deux ventres, est multiple de $\frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$.

• Le même phénomène se produit de même à l'autre extrémité ; en notant $x' = x - L$ et $\varphi'_+ = \varphi_+ - k\,L$ on peut écrire :

$$S(x,t) = S_{max}\ \cos(\omega\,t - k\,x' + \varphi'_+) + S_{max}\ \cos(\omega\,t + k\,x' + \varphi'_+ + \pi)\ \ ;$$

$$S(x,t) = 2\,S_{max}\ \cos\left(\omega\,t - k\,L + \varphi_+ + \frac{\pi}{2}\right)\ \cos\left(k\,.\,(x-L) + \frac{\pi}{2}\right)\ .$$

L'immobilité de la corde $\forall\,t$ est bien obtenue pour $x = L$, mais cela n'est compatible avec le comportement en $x = 0$ que si les nœuds et les ventres se correspondent : $k\,L = n\,\pi$, c'est à dire $L = n\frac{\lambda}{2}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

• Pour les longueurs d'onde ne respectant pas cette condition, les réflexions successives aux extrémités donnent rapidement une superposition “aléatoire” qui disparaît par compensation de termes de signes contraires, d'autant plus qu'il y a ensuite amortissement.

Pour les “fréquences de résonance” de la corde (vérifiant la condition précédente) on obtient au total une oscillation “stationnaire”, restant visible bien que finissant par être amortie, avec une amplitude S_m dépendant du lieu, ce qui peut se réécrire sous la forme :

$$S(x,t)\ =\ S_m(x)\ \cos(\omega\,t + \varphi)\ \ ;\ \ S_m(x) = S_{max}\ \sin(k\,x)\ .$$

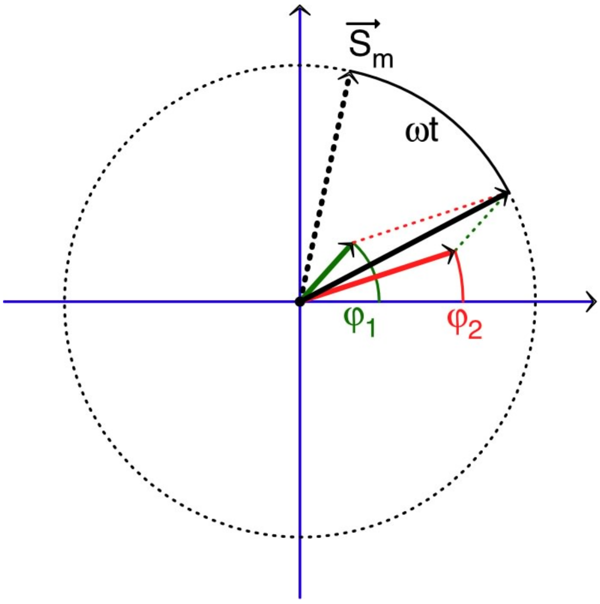
◊ remarque : cette propriété est très générale ; la propagation d'ondes dans un milieu limité ne peut se faire significativement que pour un ensemble de fréquences de résonance caractéristiques du milieu.

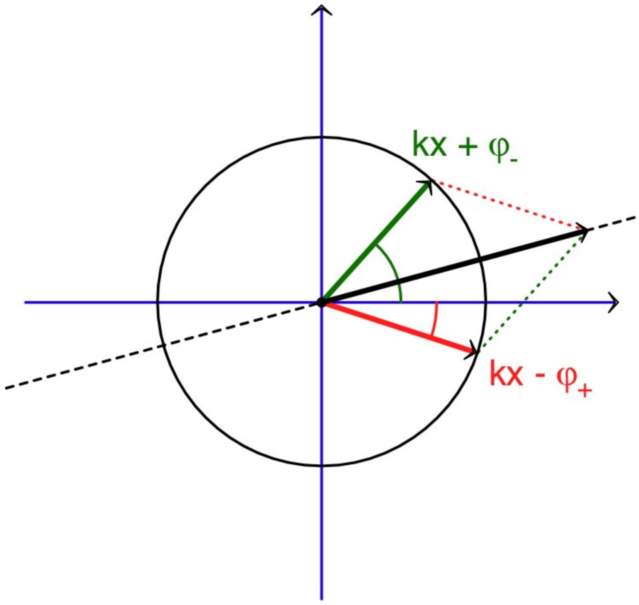
3. Représentation de Fresnel

• Pour ceux qui préfèrent une représentation graphique plutôt que des expressions algébriques, les diagrammes de Fresnel permettent de visualiser graphiquement la superposition de deux signaux à l'aide de vecteurs tournants : le signal algébrique correspond à la projection sur l'axe horizontal.

Pour des signaux se propageant dans le même sens, on peut utiliser des vecteurs tournant dans le sens trigonométrique à la vitesse angulaire ω, avec une position initiale correspondant à la phase φ.

◊ remarque : une représentation par des nombres complexes est possible.



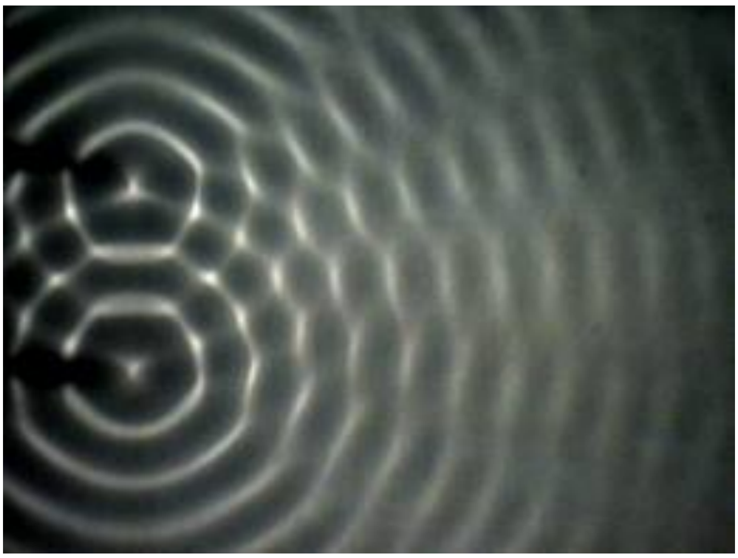


Pour une propagation en sens contraire, compte tenu de la parité du cosinus, on peut utiliser des vecteurs tournant dans le sens horaire. En particulier pour deux signaux de même amplitude, on peut aussi justifier graphiquement l'oscillation stationnaire.

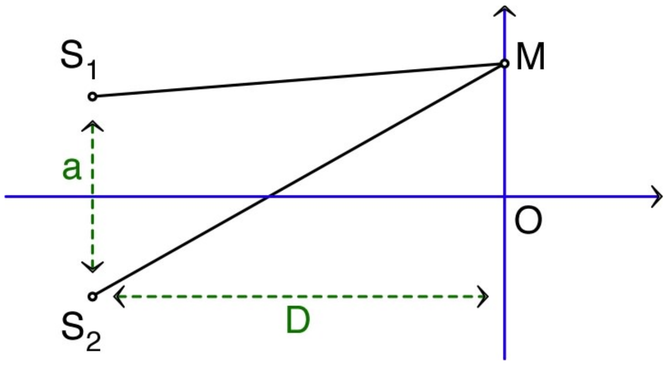
📖 *exercices n° I et II.*

4. Interférences

• Ce phénomène se généralise à plusieurs dimensions, par exemple pour l'interférence des ondes à la surface de l'eau.



Selon le retard dû à la propagation, la superposition peut être constructive ou destructive.



◊ lorsque la différence de chemin parcouru par les deux parties de l'onde (“différence de marche”) est multiple de la longueur d'onde, leurs effets s'ajoutent (interfèrent) constructivement ;
◊ si la différence de marche est décalée d'une demi longueur d'onde, l'interférence est destructive (absence d'oscillation) ;
◊ en notant x l'écart algébrique d'un point M de l'écran par rapport à l'origine O sur l'axe, la différence de marche peut s'écrire :

$$S_2M - S_1M = \sqrt{\left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2} - \sqrt{\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2} \;\; ;$$

◊ en simplifiant au premier ordre d'approximation (y et $a \ll D$) :

$$S_2M - S_1M = \frac{S_2M^2 - S_1M^2}{S_2M + S_1M} \approx \frac{a\,y}{D} \;\; ;$$

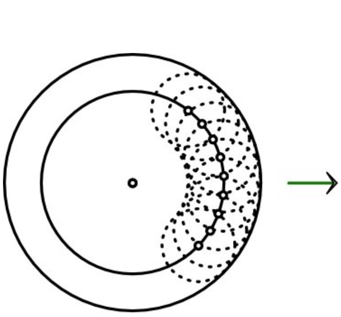
◊ l'interférence constructive pour $S_2M - S_1M = n\,\lambda$ où $n \in \mathbb{Z}$ correspond à des franges d'interférence séparées par l' interfrange $\Delta y = \frac{\lambda\,D}{a}$.

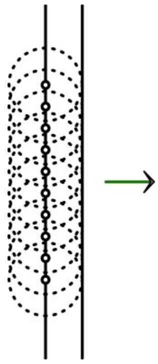
◊ remarque : cela correspond à des directions telles que $\sin(\theta) \approx n\frac{\lambda}{a}$.

◊ remarque : l'interférence est d'autant moins marquée loin de l'axe de symétrie, car les ondes y ont des amplitudes différentes (indépendamment de l'amortissement, l'énergie des ondes circulaires “s'étale” en se propageant, donc leur amplitude diminue en conséquence).

5. Diffraction

• Le principe des ondelettes d'Huygens - Fresnel suppose que chaque point du front d'onde réémet une ondelette sphérique. Il suffit d'en représenter quelques unes pour visualiser la surface enveloppe des ondelettes, seul lieu où elles interfèrent constructivement, décrivant le front d'onde suivant.

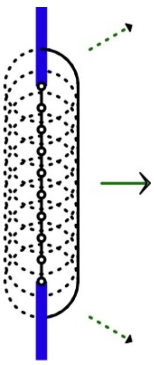


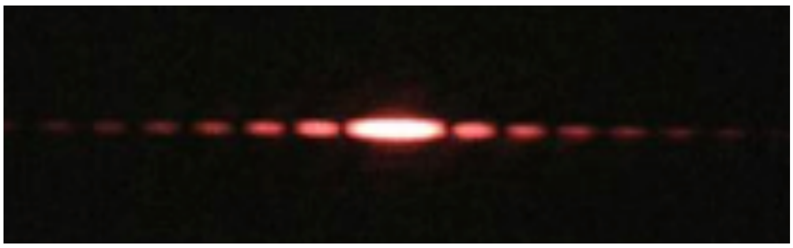


On constate ainsi que, dans un milieu homogène et isotrope, une onde plane, cylindrique ou sphérique continue à se propager de la même façon.

• Lorsqu'une onde plane est limitée par les bords d'un obstacle, les ondelettes des bords suggèrent qu'une partie de l'énergie de l'onde est “diffractée”.

Pour un faisceau large, cette diffraction est négligeable en proportion de l'énergie totale de l'onde : on considère que le faisceau est “limité” par les bords mais que la propagation de la partie qui continue n'est pas modifiée.





Par contre, si on essaie de limiter fortement un faisceau (largeur d “comparable” à la longueur d'onde), la diffraction peut être importante en proportion : une partie non négligeable de l'énergie est diffractée dans un angle tel que $\sin(\theta) \approx \frac{\lambda}{d}$.

🕮 *exercice n° III.*