DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES - corrigé des exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Fonction de deux variables

1. • La fonction est définie pour : $x\,y > 0$ et $y \geq 0$; c'est-à-dire : $x > 0$ et $y > 0$.

2. • En considérant y constant, on obtient : $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x}$.
• En considérant x constant, on obtient : $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{y} + \frac{3}{2}\sqrt{y}$.
• Pour $x = 1$ et $y = 2$, on obtient en particulier :
$f(x,\ y) = \ln(2) + 2\,\sqrt{2} - 1 \approx 2{,}52$; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2{,}62$.

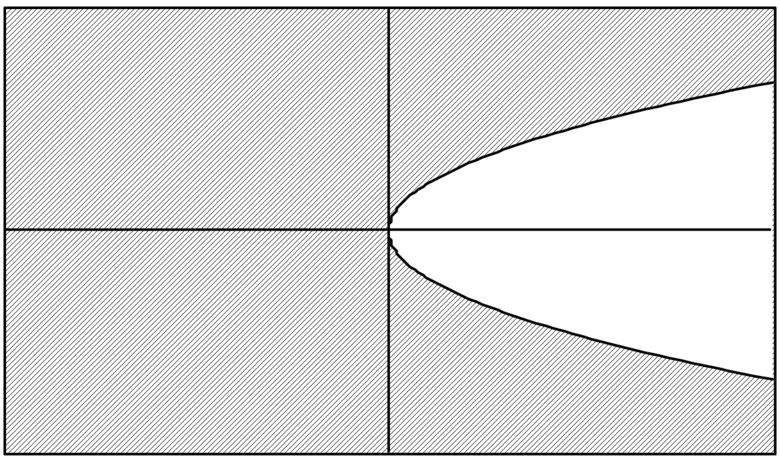
II. Dérivées partielles et dérivée totale

• Les dérivées partielles sont respectivement : $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2\,x\ \sin(y)$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 \cos(y) - 1$.
• On peut écrire : $df(x,\ y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy$ puis : $\frac{df(t)}{dt} = \frac{df(x,y)}{dt} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\frac{dy(t)}{dt}$.
• Compte tenu des dérivées partielles calculées précédemment, la dérivée “totale” a donc effectivement l'expression indiquée.

B. EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

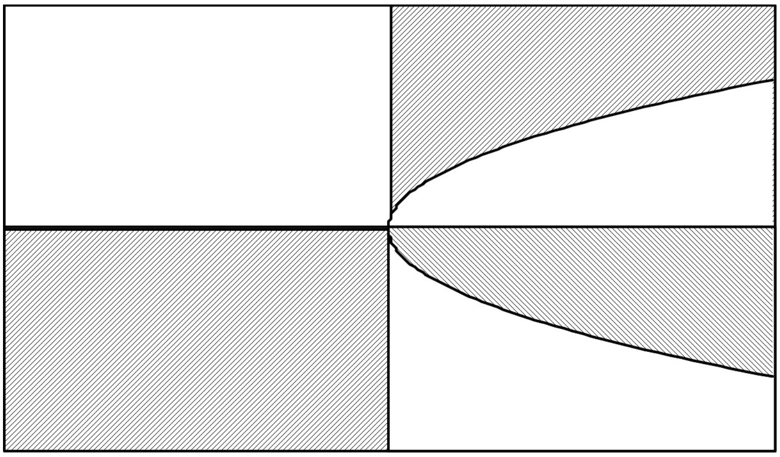
III. Dérivées partielles et dérivée totale

1. • La fonction est définie pour $x\,y\,.\,(y^2 - x) \geq 0$.
• La relation $(y^2 - x) \geq 0$ correspond à $x \leq y^2$ (zone hachurée) :



◊ remarque : il est plus rapide d'étudier $x = x(y)$...
• La relation $x\,y \geq 0$ correspond aux quarts de plan : $(x \geq 0$ et $y \geq 0)$ ou $(x \leq 0$ et $y \leq 0)$.

• Le domaine de définition cherché correspond à : $(x\,y \geq 0$ et $x \leq y^2)$ ou $(x\,y \leq 0$ et $x \geq y^2)$; donc par combinaison des deux conditions (zone hachurée) :



◊ remarque : les limites sont acceptées.

2. • On obtient : $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y.(y^2 - 2\,x)}{2\sqrt{x\,y.(y^2 - x)}}$; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x.(3\,y^2 - x)}{2\sqrt{x\,y.(y^2 - x)}}$.
• Pour : $x = 1$ et $y = 2$: $f(x,y) = \sqrt{6} \approx 2{,}45$; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{6}} \approx 0{,}816$; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{11}{2\sqrt{6}} \approx 2{,}25$.

3. • En substituant $y = y(x) = 2\,x + 1$, on obtient (il y a d'autres formulations possibles) :
$$f(x) = f\left(x,\ y(x)\right) = \sqrt{x\,.(2\,x+1)((2\,x+1)^2 - x)} = \sqrt{x\,.(2\,x+1)(4\,x^2 + 3\,x + 1)} \ ;$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{(2\,x+1).(4\,x^2 + 2\,x + 1)}{2\sqrt{x.(2\,x+1)(4\,x^2+3\,x+1)}} \ ; \ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x.(12\,x^2 + 11\,x + 3)}{2\sqrt{x.(2\,x+1)(4\,x^2+3\,x+1)}} .$$
◊ remarque : l'équation correspond à une courbe au moins partiellement dans le domaine de définition de la fonction (la partie pour $x \geq 0$ et celle pour $x \leq -\frac{1}{2}$).
• La dérivée totale peut s'écrire, après simplification : $\frac{df(x)}{dx} = \frac{32\,x^3 + 30\,x^2 + 10\,x + 1}{2\sqrt{x.(2\,x+1)(4\,x^2+3\,x+1)}}$.
• Par comparaison, après regroupement au même dénominateur et simplifications, on peut vérifier qu'on obtient le même résultat pour : $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\frac{dy(x)}{dx} = \frac{(2\,x+1).(4\,x^2+2\,x+1) + 2\,x.(12\,x^2+11\,x+3)}{2\sqrt{x.(2\,x+1)(4\,x^2+3\,x+1)}}$.