DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES - exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Fonction de deux variables

1. • Indiquer (dans le plan (x, y)...) le domaine de définition de la fonction : $f(x, y) = \ln(x\, y) + y^{3/2} - 1$.

2. • Calculer les expressions respectives de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.
   • Calculer les valeurs respectives de f, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ pour : $x = 1$ et $y = 2$.

II. Dérivées partielles et dérivée totale

• On considère la fonction : $f(x, y) = x^2 \sin(y) - y$, où les quantités $x = x(t)$ et $y = y(t)$ dépendent elles mêmes du temps t.
• Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.
• Montrer que la fonction définie par : $f(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ a pour dérivée “totale” par rapport au temps : $\frac{df(t)}{dt} = \dot{f} = 2\, x\, \sin(y)\, \dot{x} + (x^2\, \cos(y) - 1)\, \dot{y}$.
◊ remarque : les $\dot{\square}$ désignent la dérivation par rapport au temps.

B. EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

III. Dérivées partielles et dérivée totale

1. • Indiquer (dans le plan (x, y)...) le domaine de définition de la fonction : $f(x, y) = \sqrt{x\, y\, .\, (y^2 - x)}$.

2. • Calculer les expressions respectives de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.
   • Calculer les valeurs respectives de f, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ pour : $x = 1$ et $y = 2$.

3. • On se limite, dans le plan, à une courbe d'équation $y = y(x) = 2\, x + 1$; calculer $f(x) = f\big(x, y(x)\big)$ et réexprimer de même les dérivées $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ (calculées précédemment) en fonction de x seul.
   • Calculer la dérivée totale $\frac{df(x)}{dx}$ et comparer à : $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \frac{dy(x)}{dx}$.