

# Rapprochements didactiques entre trois disciplines scientifiques dans la continuité [ bac-3 ; bac+3]

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Grandeurs physiques et fonctions mathématiques</b>	<b>2</b>
<b>III</b>	<b>Fonctions d'une seule variable, dérivée et petites variations</b>	<b>3</b>
A	Différentes notations . . . . .	3
B	Intérêt de la notation de Leibniz . . . . .	3
C	Différentielle et petites variations . . . . .	4
<b>IV</b>	<b>Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles et différentielle</b>	<b>4</b>
A	Dérivées partielles . . . . .	4
B	Grandeurs liées par une équation . . . . .	5
C	Différentielle et petites variations . . . . .	6
<b>V</b>	<b>Gradient</b>	<b>7</b>
A	Coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ . . . . .	7
B	Changement de coordonnées . . . . .	7
C	Recherche d'un extremum . . . . .	7
D	Gradient et lignes de niveau . . . . .	8
<b>VI</b>	<b>Formes différentielles</b>	<b>8</b>
A	Définition . . . . .	8
B	Intégration d'une forme différentielle . . . . .	9
<b>VII</b>	<b>Équations différentielles</b>	<b>9</b>
A	Résolution de l'équation homogène . . . . .	10
B	Recherche d'une solution particulière de l'équation complète . . . . .	11
C	Utilisation de transformations intégrales . . . . .	12
D	Facteur de qualité et coefficient d'amortissement . . . . .	16
E	Intégration et intégrale première d'une équation différentielle . . . . .	17
F	Linéarisation d'une équation différentielle . . . . .	17
G	Changement de variables . . . . .	20
<b>VIII</b>	<b>Découpage infinitésimal et intégration</b>	<b>21</b>
<b>IX</b>	<b>Annexes</b>	<b>23</b>
A	Nombres complexes . . . . .	23
B	Géométrie du plan et de l'espace . . . . .	24
C	Mécanique, électricité . . . . .	26

## I– Introduction

Ce document s'adresse à l'ensemble des enseignants de mathématiques, physique-chimie et sciences de l'ingénieur intervenant dans le segment de formation [bac–3 , bac+3] ; certaines notions auxquelles il fait référence sont abordées dès le lycée tandis que d'autres sont spécifiques des programmes de classes préparatoires. Le document vise à faire connaître des différences de présentation et d'interprétation de certaines notions selon les disciplines.

Dans la plupart des cas, ces notions sont d'origine mathématique. On distingue alors :

- celles qui ont été introduites dans le cours de mathématiques avant leur utilisation en physique-chimie et en sciences de l'ingénieur. Les professeurs de ces disciplines utilisatrices doivent alors connaître le contexte, le vocabulaire et les notations utilisés en mathématiques pour introduire et définir ces notions dans le cadre des programmes en vigueur. De manière symétrique, le professeur de mathématiques doit se tenir informé de l'utilisation qui est faite par ses collègues des notions qu'il présente ;
- celles qui ne figurent pas dans les programmes de mathématiques du secondaire ou des classes préparatoires, mais qui sont utilisées dans les autres disciplines. Pour leur identification, on renvoie le lecteur aux programmes de physique, chimie, sciences de l'ingénieur dans lesquels ces notions sont clairement explicitées. Dans ce cas, l'introduction mathématique du concept est à la charge du professeur qui aura à l'utiliser. Il lui est alors recommandé de s'informer auprès de ses collègues de mathématiques de la présentation communément retenue dans cette discipline pour introduire la notion en question. Cette concertation doit par ailleurs lui permettre d'adapter la présentation mathématique qui lui revient de fait, aux acquis de ses étudiants dans cette discipline.

Ce document est le fruit d'un travail collectif qui a réuni des professeurs et des inspecteurs généraux des groupes disciplinaires précités.

## II– Grandeur physiques et fonctions mathématiques

La notion de fonction est abordée dans le cours de mathématiques dès la classe de seconde comme un procédé associant à un nombre un autre nombre, appelé son image. Étudiée à travers des exemples de référence, cette notion est progressivement formalisée pour aboutir à celle d'application d'un ensemble  $A$  dans un ensemble  $B$ . La fonction est alors désignée par une lettre, par exemple  $G$ , et l'unique image de  $a \in A$  par  $G$  est notée  $G(a)$ . Les fonctions occupent également une place centrale en informatique où elles ont un sens proche de celui des Mathématiques

Les physiciens, les chimistes et les enseignants de sciences industrielles s'intéressent quant à eux à des « grandeurs physiques » susceptibles d'être mesurées. Elles sont nombreuses et variées : longueur  $l$ , durée  $t$ , vitesse  $v$ ; intensité  $i$  du courant, énergie  $E$ ; quantité de matière; pression  $P$ , température  $T$ ... La modélisation des phénomènes conduit à relier ces grandeurs entre elles par des lois. Ainsi, une grandeur  $G$  peut s'exprimer en fonction d'une (ou plusieurs) autre(s) grandeur(s)  $g_i$  qui seront traitées, selon le contexte, comme des variables ou des paramètres. La notation  $G(g_1, g_2, \dots, g_N)$  traduit que la grandeur  $G$  dépend des grandeurs physiques  $g_1, g_2, \dots, g_N$ . Corrélativement, ce choix définit du point de vue des mathématiques une fonction  $G$  de plusieurs variables  $(g_1, g_2, \dots, g_N) \mapsto G(g_1, \dots, g_N)$ . Une difficulté majeure réside dans le fait que le physicien note avec la même lettre  $G$  toutes les fonctions, quoique différentes, servant à exprimer la même grandeur  $G$  en fonction de jeux de variables différents.

### Exemple 1 : la chute libre

Dans l'exemple classique du mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur uniforme, l'abscisse  $x$  et la cote  $z$  de la particule sont reliées à l'instant  $t$  d'observation par les lois horaires :

$$x(t) = v_{0x} t \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_{0z} t$$

L'élimination de la variable  $t$  entre ces deux équations conduit à l'équation de la trajectoire :

$$z(x) = -\frac{gx^2}{2v_{0x}^2} + \frac{v_{0z}x}{v_{0x}}$$

qui traduit la dépendance de la cote  $z$  de la particule en fonction de son abscisse  $x$ .

Du point de vue mathématique, cela conduit à manipuler *deux* fonctions différentes  $x \mapsto z(x)$  et  $t \mapsto z(t)$  associées à la même lettre  $z$ . Cet amalgame au niveau des notations conduit certains étudiants à penser que la loi horaire  $t \mapsto z$  et la trajectoire  $x \mapsto z$  sont toujours des fonctions de même nature, alors que, dans le cas de la chute libre, cette particularité est due au caractère linéaire de la dépendance de  $x$  vis à vis de  $t$ .

### Exemple 2 : l'entropie en thermodynamique

En thermodynamique, on utilise à la fois l'expression  $S(T, V)$  de l'entropie en fonction de la température  $T$  et du volume  $V$  et son expression  $S(T, P)$  en fonction de la température  $T$  et de la pression  $P$ . Ici encore le physicien donne le même nom  $S$  (celui de la grandeur physique) aux deux fonctions  $(T, V) \mapsto f(T, V)$  et  $(T, P) \mapsto g(T, P)$  qui sont en fait différentes.

## III – Fonctions d'une seule variable, dérivée et petites variations

### A – Différentes notations

Dans leur parcours en classe préparatoire, les étudiants sont confrontés à des notations différentes pour la dérivée en un point donné : notations de Lagrange, Leibniz et Newton. Pour fixer les idées, on suppose ici que la grandeur  $x$  est la position d'un point dépendant du temps  $t$ . Comme il a été vu précédemment, le mathématicien introduit une fonction  $f$  telle que  $x = f(t)$  et le physicien note directement  $x(t)$ .

- **Notation de Lagrange** :  $f'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $f$ . La valeur en  $t$  de cette fonction est notée  $f'(t)$ . Cette notation nécessitant une référence à la fonction  $f$ , elle est peu utilisée par le physicien qui, comme il a été détaillé précédemment, privilégie les grandeurs : il introduit donc une nouvelle grandeur, ici la vitesse.
- **Notation de Leibniz** : elle consiste à noter  $\frac{dx}{dt}$  la valeur au point générique  $t$  de la dérivée de la grandeur  $x$  par rapport à  $t$ . L'intérêt de cette notation est d'exprimer la dérivée en  $t$  comme le rapport des accroissements infinitésimaux  $dx = x(t + dt) - x(t)$  et  $dt$ . En un point particulier  $t_0$ , la dérivée se note  $\frac{dx}{dt}(t_0)$ . En physique et sciences de l'ingénieur, on utilise également la notation  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0}$ . Si on s'intéresse à la fonction  $f$  qui relie les deux grandeurs  $x$  et  $t$  par la relation  $x = f(t)$ , la notation de Leibniz revient à écrire  $dx = f'(t)dt$  ou encore  $f'(t) = \frac{dx}{dt}$ .
- **Notation de Newton** : elle est exclusivement réservée à la dérivée par rapport à la variable temps. Pour le physicien,  $\dot{x}$  désigne  $v(t) = \frac{dx}{dt}$ .

Dans le cours de mathématiques, la notation la plus fréquemment employée est celle de Lagrange, bien adaptée à la manipulation des fonctions. En physique-chimie et en sciences de l'ingénieur, les notations de Leibniz et de Newton sont couramment employées, en raison de leur référence explicite aux grandeurs.

### B – Intérêt de la notation de Leibniz

La notation  $dz/dt$  est bien adaptée au point de vue du physicien.

#### Elle permet de lever l'ambiguïté sur la variable

Revenons à l'exemple 1 : l'intérêt de la notation  $dz/dt$  est de lever l'ambiguïté sur la variable choisie. En définitive, la notation  $f'$  d'usage courant en mathématiques est parfaitement adaptée au fait qu'on ne donne pas le même nom aux deux fonctions  $z(t)$  et  $z(x)$ , ce qu'on écrira  $z = f(t)$  et  $z = g(x)$ , les notations  $f'$  et  $g'$  pour les dérivées étant alors *sans ambiguïté*.

#### Elle permet de retrouver aisément le calcul de la dérivée d'une fonction composée

On suppose que  $z = g(y)$  et  $y = f(x)$ . La formule bien connue

$$(g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

s'écrit :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Tout se passe comme s'il suffisait de simplifier une fraction sans tenir compte de l'annulation éventuelle de l'accroissement de  $y$ . Moyen mnémotechnique efficace, une telle démonstration n'est pas recevable du strict point de vue des mathématiques.

### Dérivée d'une bijection réciproque

On écrit  $y = f(x)$  et  $x = f^{-1}(y)$ . La formule bien connue

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

se traduit simplement avec les notations de Leibniz en :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

Outre le fait qu'elle donne la valeur de la dérivée de la fonction réciproque en cas d'existence, cette égalité a le mérite de retrouver cette condition d'existence  $\left(\frac{dy}{dx} \neq 0\right)$ .

## C– Différentielle et petites variations

Pour une fonction  $f$  d'une seule variable, la notation de Leibniz étudiée au chapitre II aboutissant à l'égalité  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$  peut aussi s'écrire sous la forme  $dy = f'(x)dx$ . En physique, en chimie et en sciences de l'ingénieur, on interprète la notation différentielle  $dy$  comme l'accroissement de la grandeur  $y$  pour une petite variation  $dx$  de  $x$ , ce qui donne l'égalité

$$dy = y(x + dx) - y(x) = f'(x)dx$$

égalité qui pose problème pour les valeurs de  $x$  en lesquelles  $f'(x) = 0$ . Il s'agit en fait de la troncature à l'ordre 1 du développement de Taylor de  $f$  que le mathématicien écrit :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h\epsilon(h)$$

avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ . Notons qu'il faudrait poursuivre le développement de Taylor à un ordre supérieur pour approximer  $f(x + h) - f(x)$  lorsque  $f'(x) = 0$ .

L'application linéaire  $h \mapsto hf'(x)$  est appelée différentielle de  $f$  en  $x$  (ou application linéaire tangente à  $f$  en  $x$ ) et notée  $df(x)$ . Elle est définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier et est représentée géométriquement par la droite passant par l'origine et parallèle à la tangente au point d'abscisse  $x$  à la courbe d'équation  $y = f(x)$ . L'introduction de la différentielle en  $x$  à partir de l'égalité  $dy = f'(x)dx = y(x + dx) - y(x)$  induit pour le physicien la tentation de ne considérer la différentielle en  $x$  que pour des valeurs de la variable voisines de  $x$ , ce qui est incorrect du point de vue mathématique.

## IV– Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles et différentielle

Le calcul différentiel à plusieurs variables est une source de difficultés pour la plupart des étudiants. Ceci est en parti dû à la divergence des usages et des notations en mathématiques et en physique-chimie, divergence encore plus forte que dans le cadre d'une seule variable.

### A– Dérivées partielles

Elles sont utilisées pour dériver, en mathématiques une fonction, en physique-chimie une grandeur, dépendant de plusieurs variables par rapport à l'une d'entre elles, les autres étant fixées.

En mathématiques, la notation de Leibniz  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est employée pour la dérivée partielle d'une fonction  $f$  du couple  $(x, y)$  par rapport à la variable  $x$ .

Celle-ci peut aussi être notée  $f'_x$  ou  $\partial_1 f$  rappelant que la dérivation se fait par rapport à la première variable du couple  $(x, y)$ . La notation  $\partial_1 f(x, y)$  (qui représente la valeur en  $(x, y)$  de la dérivée partielle de  $f$  par rapport à la première variable) est plus claire que la notation  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ , dans laquelle la variable  $x$  a un double statut : variable muette dans  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , elle est explicite dans le couple  $(x, y)$ . Il en serait de même pour  $f'_x(x, y)$ .

En physique, plusieurs notations peuvent être utilisées selon le contexte. En électromagnétisme, où les grandeurs dépendent toujours de la position  $(x, y, z)$  et du temps  $t$ , on ne spécifie que la variable par rapport à laquelle on dérive, utilisant les mêmes notations qu'en mathématiques  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial t}$ .

Il n'en est plus de même en thermodynamique (cf. page 3) : ainsi, l'entropie  $S$  peut s'exprimer dans différents jeux de deux variables prises parmi la température  $T$ , la pression  $P$  et le volume  $V$  : par exemple  $S(T, V)$  et  $S(T, P)$ . Ceci impose de préciser, non seulement la variable par rapport à laquelle on dérive, mais aussi celle qui est bloquée. On notera alors :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$$

des dérivées partielles de la même grandeur  $S$ , mais qui ne concernent pas la même fonction. Les notations sont ici sans ambiguïté puisqu'en indiquant la variable « bloquée » et la variable par rapport à laquelle on dérive, on explicite le jeu des deux variables concernées et donc la fonction dont il est question pour exprimer la grandeur entropie.

Mathématiquement : si  $S = f(T, V) = g(T, P)$ ,  $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$  représente  $\frac{\partial f}{\partial T}$  et  $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$  représente  $\frac{\partial g}{\partial T}$ .

Le même problème se pose en thermodynamique chimique avec les potentiels thermodynamiques.

## B– Grandeur liées par une équation

En thermodynamique, les grandeurs  $(P, T, V)$  sont liées par une équation d'état  $f(P, T, V) = 0$ , où  $f$  est une fonction régulière.

Par application du théorème des fonctions implicites<sup>1</sup>, l'équation d'état  $f(P, T, V) = 0$  permet d'exprimer, sous certaines conditions, chacune des grandeurs en fonction des deux autres. Une condition pour que les trois fonctions  $P(V, T)$ ,  $V(P, T)$  et  $T(P, V)$  soient définies au voisinage des valeurs  $P_0, T_0, V_0$  est :

$$\frac{\partial f}{\partial P}(P_0, T_0, V_0) \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial V}(P_0, T_0, V_0) \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial T}(P_0, T_0, V_0) \neq 0$$

Cette condition est par exemple vérifiée pour un gaz parfait où l'équation d'état  $PV - nRT = 0$  permet même de tirer explicitement chacune des grandeurs  $(P, V, T)$  en fonction des deux autres.

Si l'on considère  $P$  dépendant de  $T$  et de  $V$ , le résultat donnant la dérivée de la réciproque d'une fonction d'une seule variable permet de justifier l'égalité

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V}$$

dans laquelle la variable bloquée est la même dans les deux membres de l'égalité.

Si la grandeur  $P$  dépend uniquement de  $V$  ( $P = P(V)$ ), et que la grandeur  $V$  dépend uniquement de  $T$  ( $V = V(T)$ ), alors  $P = P(V(T))$ .

Par dérivation de la fonction composée, il vient

$$\frac{dP}{dT} = \frac{dV}{dT} \cdot \frac{dP}{dV}$$

1. Ce théorème n'est pas au programme de mathématiques des classes préparatoires, mais son résultat peut être présenté aux étudiants de manière géométrique

ce qui, compte tenu de l'égalité  $\frac{dV}{dT} = \frac{1}{\frac{dV}{dT}}$ , permet d'écrire  $\frac{dP}{dT} = \frac{\frac{dP}{dV}}{\frac{dV}{dT}}$ .

Cette égalité pourrait être interprétée comme résultant de la « simplification » par  $dV$ . Une analogie abusive pourrait laisser penser que

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P}$$

égalité parfaitement erronée, puisqu'en contradiction avec la suivante, bien connue des physiciens :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -1$$

### Démonstration de l'égalité

Le théorème des fonctions implicites permet d'exprimer  $T$  en fonction de  $(P, V)$ . Dès lors, la dérivation par rapport à  $V$  de l'équation d'état  $f(P, T(P, V), V) = 0$  conduit à :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \frac{\partial f}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial V} = 0$$

Puis, par permutation de  $P, T$  et  $V$  :

$$\frac{\partial f}{\partial P} + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \frac{\partial f}{\partial V} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial V} + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \frac{\partial f}{\partial T} = 0$$

On en déduit la relation annoncée.

## C– Différentielle et petites variations

Soit  $f$  une fonction de deux variables suffisamment régulière sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $m_0 = (x_0, y_0)$  un point de  $D$  et  $z_0 = f(x_0, y_0)$ . Si les dérivées partielles  $f'_x$  et  $f'_y$  de  $f$  sont continues sur  $D$ , alors  $f$  admet en  $(x_0, y_0)$  un développement limité à l'ordre 1 :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h f'_x(x_0, y_0) + k f'_y(x_0, y_0) + \sqrt{h^2 + k^2} \varepsilon(h, k)$$

où  $\varepsilon(h, k)$  tend vers 0 quand  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ . La différentielle de  $f$  en  $(x_0, y_0)$ , encore appelée application linéaire tangente à  $f$  en  $(x_0, y_0)$  et notée  $df(x_0, y_0)$ , est alors définie sur  $\mathbb{R}^2$  tout entier par :

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto df(x_0, y_0). (u, v) = u f'_x(x_0, y_0) + v f'_y(x_0, y_0)$$

Si  $dx$  et  $dy$  désignent respectivement les projections  $(u, v) \rightarrow u$  et  $(u, v) \rightarrow v$ , la définition de l'application linéaire tangente en  $(x_0, y_0)$  s'écrit, en notation fonctionnelle :

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) dx + f'_y(x_0, y_0) dy$$

Ceci est une relation entre applications, absolument pas une relation entre réels et, *a fortiori*, entre petites variations.

Posons maintenant, avec les notations de la physique (et de la chimie) :  $h = \delta x$  et  $k = \delta y$ , où  $h$  et  $k$  représentent de « petites variations » de  $x$  et de  $y$  autour de  $x_0$  et de  $y_0$ . Notons également  $z = f(x_0, y_0)$  et  $\delta z = f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - f(x_0, y_0)$  la variation correspondante de  $z$ .

Cette dernière a donc pour expression :

$$\delta z = df(x_0, y_0) \cdot (\delta x, \delta y) + \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \varepsilon(\delta x, \delta y)$$

soit, au premier ordre du développement limité :

$$\delta z = df(x_0, y_0) \cdot (\delta x, \delta y) \quad \text{soit} \quad \delta z = f'_x(x_0, y_0) \cdot \delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \delta y$$

La confusion entre  $dz$  et  $\delta z = z(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - z(x_0, y_0)$  induit pour le physicien la tentation de ne considérer la différentielle en  $(x_0, y_0)$  que pour des valeurs voisines de  $(x_0, y_0)$ , ce qui est incorrect du point de vue mathématique.

#### ☞ Remarque

Les notations étant muettes, rien n'empêche d'identifier  $dx$  et  $\delta x$ . Mais, au plan mathématique, cela entraîne une confusion entre la fonction  $dx$  (projection  $(h, k) \mapsto h$ ), définie sur  $\mathbb{R}^2$  et le réel  $\delta x$  représentant la variation de la variable  $x$  au voisinage de  $x_0$ .

## V– Gradient

### A– Coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

Si  $z = f(x, y)$  avec  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un domaine  $D$ , le gradient de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  est par définition le vecteur de coordonnées

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

dans la base orthonormale  $(\vec{i}, \vec{j})$  de  $\mathbb{R}^2$ . On le note  $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0)$  ou  $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ .

L'égalité

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

traduit que la différentielle de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  est le produit scalaire du gradient de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  par le vecteur  $(dx, dy)$ , ce qui, en faisant abstraction du point  $(x_0, y_0)$  et en revenant à la grandeur  $z$ , s'écrit, en physique :  $dz = \overrightarrow{\text{grad}}(z) \cdot \overrightarrow{dM}$ . Le gradient définit alors sur  $D$  un champ de vecteurs.

### B– Changement de coordonnées

Les formules  $\left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right)$  donnent les coordonnées du gradient dans la base canonique. Elles ne sont plus valides si on change de coordonnées. Par exemple, les coordonnées du gradient de  $z$  dans la base polaire ne sont pas  $\left( \frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)$ .

#### Coordonnées du gradient dans la base polaire

D'une part,  $\overrightarrow{dM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$ . D'autre part,  $dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta$ . En identifiant avec  $dz = \overrightarrow{\text{grad}}(z) \cdot \overrightarrow{dM}$ , on obtient que les coordonnées de  $\overrightarrow{\text{grad}}(z)$  dans la base polaire orthonormale  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  sont :

$$\left( \frac{\partial z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)$$

Exemple :  $z = \frac{-\cos \theta}{r}$ . Après calcul, on trouve  $\overrightarrow{\text{grad}}(z) = \frac{1}{r^2} \vec{u}_r(2\theta)$ .

### C– Recherche d'un extremum

Si  $f$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $D$ , atteint un extremum (maximum ou minimum) local en un point  $(x_0, y_0)$  de  $D$ , alors le gradient de  $f$  est nul en ce point.

#### Formulation mathématique de la preuve (dans le cas d'un maximum) :

Pour  $t$  suffisamment petit ( $-\alpha < t < \alpha$ ),

$$f(x_0 + t, y_0) \leq f(x_0, y_0)$$

Donc pour  $0 < t < \alpha$ ,

$$\frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \leq 0$$

En faisant  $t$  vers  $0^+$  dans cette inégalité, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \leq 0$$

De même, pour  $-\alpha < t < 0$ ,

$$\frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \geq 0$$

En faisant  $t$  vers  $0^-$  dans cette inégalité, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \geq 0$$

D'où  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ . On raisonne de même avec  $f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)$  pour montrer que  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ .

**Formulation physique de la preuve (dans le cas d'un maximum) :**

Si  $z$  atteint un maximum en un point, alors en ce point  $dz \leq 0$ , quelle que soit l'orientation du vecteur  $\overrightarrow{dM}$ . Or  $dz = \vec{\nabla} z \cdot \overrightarrow{dM}$ . Donc  $\vec{\nabla} z = 0$ . Cette preuve, très voisine de la précédente, est basée sur l'identification de  $dz$  avec une petite variation de  $z$ .

## D– Gradient et lignes de niveau

Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.

**Preuve en physique :**

Le long d'une ligne de niveau  $z = k$ ,  $dz = 0 = \vec{\nabla} z \cdot \overrightarrow{dM}$ . Donc  $\vec{\nabla} z \perp \overrightarrow{dM}$ , c'est-à-dire que  $\vec{\nabla} z$  est orthogonal aux lignes de niveau de  $z$  (ou équivalentes).

**Preuve en mathématiques :**

On utilise un paramétrage  $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$  de la ligne de niveau d'équation  $f(x, y) = k$ . En dérivant l'identité  $\forall t \quad f(x(t), y(t)) = k$ , il vient :

$$\vec{\nabla} f(M(t)) \cdot \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = 0$$

ce qui traduit que  $\vec{\nabla} f(M(t))$  est orthogonal au vecteur  $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}$  qui dirige la tangente en  $M(t)$  à la ligne de niveau.

Les deux approches sont ici très voisines.

On peut compléter le résultat précédent en affirmant que *le gradient est orienté dans le sens des valeurs croissantes de  $f$  (ou de  $z$ )*. En effet, le produit scalaire  $dz = \vec{\nabla} z \cdot \overrightarrow{dM}$  est maximal si  $\overrightarrow{dM}$  et  $\vec{\nabla} z$  sont colinéaires et de même sens : le gradient indique la direction où l'accroissement de  $z$  est le plus fort.

## VI– Formes différentielles

### A– Définition

Soient  $(x, y) \mapsto A(x, y)$  et  $(x, y) \mapsto B(x, y)$  deux fonctions définies et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un ouvert connexe  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  (c'est-à-dire un ouvert d'un seul tenant) à valeurs réelles. Pour tout  $(x, y)$  de  $D$ , on définit  $\omega(x, y)$  comme l'application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\omega(x, y) = A(x, y) \cdot dx + B(x, y) \cdot dy$$

Conformément à la définition des projections  $dx$  et  $dy$  vue précédemment, l'image du couple  $(h, k)$  par  $\omega(x, y)$  est  $A(x, y) \cdot h + B(x, y) \cdot k$ . L'application  $\omega$  qui à tout  $(x, y)$  de  $D$  associe  $\omega(x, y)$  est une forme différentielle.

Exemple : Si  $f$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D$ , sa différentielle  $df$  est une forme différentielle sur  $D$  puisque  $df(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$  avec  $A(x, y) = f'_x(x, y)$  et  $B(x, y) = f'_y(x, y)$ . Si les dérivées partielles  $f'_x$  et  $f'_y$  sont continues sur  $D$ , le théorème de Schwarz affirme alors que :

$$\frac{\partial f'_x}{\partial y} = \frac{\partial f'_y}{\partial x} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

#### ☞ Remarque

Un théorème dû à Poincaré affirme que, sous certaines conditions portant sur la géométrie du domaine  $D$  systématiquement vérifiées en physique, la condition

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad (1)$$

est en fait suffisante pour qu'il existe une fonction  $f$  telle que  $\omega = df$ . La forme différentielle  $\omega$  est alors dite *intégrable*.

C'est ainsi qu'on peut déterminer en thermodynamique des fonctions d'état comme l'énergie interne  $U$  ou l'enthalpie  $H$ , dont les variations élémentaires  $\delta U$  et  $\delta H$  correspondent à des formes différentielles intégrables. C'est pourquoi on note ces petites variations  $dU$  et  $dH$ .

Si la condition (1) n'est pas réalisée en tout point de  $D$ , il n'existe aucune fonction  $f$  telle que  $\omega = df$  et  $\omega$  est une forme différentielle non intégrable.

Ceci dit, il reste tout à fait possible de considérer une quantité infinitésimale  $\delta z$  induite par de petites variations  $\delta x$  de la variable  $x$  et  $\delta y$  de  $y$  autour des valeurs  $(x_0, y_0)$  avec :

$$\delta z = A(x, y) \cdot \delta x + B(x, y) \cdot \delta y$$

Tel est le cas en thermodynamique pour le transfert thermique  $Q$  ou le travail échangé  $W$ . Les formes différentielles correspondant aux quantités infinitésimales  $\delta Q$  et  $\delta W$  n'étant pas intégrables, il est impossible de considérer le transfert thermique ou le travail échangé comme des fonctions d'état du système, c'est-à-dire ne dépendant que des variables d'état. En physique et en chimie, les quantités infinitésimales non intégrables sont notées systématiquement  $\delta z$  pour les distinguer des différentielles notées  $dz$ .

## B – Intégration d'une forme différentielle

Soient  $(x, y) \rightarrow A(x, y)$  et  $(x, y) \rightarrow B(x, y)$  deux fonctions définies et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $D$ , à valeurs réelles, satisfaisant en tout point de  $D$  la relation (1). Nous venons de voir que la forme différentielle  $\omega$  est alors la différentielle d'une fonction  $f$  définie sur  $D$ . La méthode suivante permet de déterminer  $f$  :

– Intégration de (1) par rapport à  $x$ , « à  $y$  constant », ce qui permet d'écrire la relation :

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x A(t, y) dt + h(y) \quad (2)$$

où  $y \in \mathbb{R} \rightarrow h(y)$  est une fonction de la seule variable  $y$  (nous disons que c'est une constante par rapport à  $x$ ) ;

– Dérivation de la relation (2) par rapport à  $y$ , « à  $x$  constant » :

$$f'_y(x, y) = B(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_{x_0}^x A(t, y) dt \right) + h'(y)$$

– Application du théorème de dérivation sous le signe intégral, puis intégration de la relation précédente pour calculer  $h(y)$  à une constante additive près.

## VII – Équations différentielles

Les équations différentielles rencontrées en physique-chimie et en sciences de l'ingénieur sont toujours d'ordre un ou deux. Elles sont la plupart du temps linéaires, soit parce que la théorie sous-jacente l'est elle-même (électromagnétisme, électrocinétique des composants linéaires, mécanique quantique), soit

parce que ses équations ont été linéarisées (oscillations mécaniques autour d'un point d'équilibre stable, cinétique chimique avec un réactif en excès, étude d'un système autour de son point de fonctionnement). En sciences de l'ingénieur les équations différentielles initiales régissant le système constituent un «modèle de connaissances», et les équations linéarisées autour d'un point de fonctionnement constituent un «modèle de comportement».

La théorie des équations différentielles linéaires repose sur deux théorèmes.

– Un théorème de structure :

La solution générale  $y$  d'une équation différentielle linéaire ( $E$ ) avec second membre s'écrit comme la somme d'une solution particulière  $y_0$  de cette équation et de la solution générale  $y_H$  de l'équation homogène associée ( $H$ ). Par ailleurs, l'ensemble des solutions de ( $H$ ) est un espace vectoriel dont la dimension est égale à l'ordre de l'équation.

– Le théorème de Cauchy-Lipschitz :

Il existe une unique solution de ( $E$ ) vérifiant un jeu de conditions initiales donné.

Le vocabulaire utilisé dans le contexte des sciences physiques et sciences industrielles mérite d'être précisé. Le régime *libre* correspond aux solutions  $y_H$  du système homogène associé ( $H$ ). L'unique solution  $y_H$  vérifiant des conditions initiales données caractérise le régime *transitoire*. En régime *forcé*, lorsque le système est excité par une action extérieure, les équations différentielles qui le régissent possèdent un second membre non nul. Pour un système stable (c'est-à-dire lorsque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_H(t) = 0$ ), on distingue le régime transitoire du régime permanent. Toutes les solutions  $y$  de ( $E$ ) ont le même comportement aux temps longs (celui de  $y_0$ ). Ce comportement caractérise le régime *permanent* (ou *établi*) du système. Aux temps courts, le comportement de  $y$  dépend des conditions initiales qui définissent  $y_H$ . Ce comportement caractérise le régime *transitoire* du système.

## A– Résolution de l'équation homogène

### A.1 Equation d'ordre un

Les usages concernant la résolution d'une équation homogène ( $H$ ) :  $y' + a(t)y = 0$  ne sont pas les mêmes en mathématiques et en physique : le physicien *reprend* les calculs d'intégration de l'équation à chaque fois, alors que le mathématicien applique un théorème donnant la forme des solutions en fonction d'une primitive de  $a$ .

Pour déterminer la solution de ( $H$ ) vérifiant  $y(t_0) = y_0$ , le physicien commence par *séparer les variables*, puis intègre de  $t_0$  à  $t$  pour trouver l'expression de  $y$  en fonction de  $t$  :

$$\frac{dy}{y} = -a(t)dt, \quad \int_{y_0}^y \frac{du}{u} = - \int_{t_0}^t a(u)du, \quad \ln|y| - \ln|y_0| = - \int_{t_0}^t a(u)du, \quad y = K \exp\left(- \int_{t_0}^t a(u)du\right)$$

Remarque : le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer que toute solution de  $y' + a(t)y = 0$  sur un intervalle  $I$  autre que la fonction nulle ne s'annule pas sur  $I$ , ce qui permet de justifier la division par  $y$ .

Dans le cours de mathématiques du premier semestre de première année de CPGE, on emploie un facteur intégrant. L'équation ( $H$ ) est en effet équivalente à :

$$\forall t \in I, \quad (y'(t) + a(t)y(t)) \exp\left(\int_{t_0}^t a(u)du\right) = 0$$

On reconnaît la dérivée de

$$t \mapsto y(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(u)du\right)$$

et on en déduit l'expression de  $y$  :

$$y(t) = K \exp\left(- \int_{t_0}^t a(u)du\right)$$

Le résultat de ce calcul permet de démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

## A.2 Equation d'ordre deux

Il n'existe aucune méthode systématique permettant de trouver la solution générale de l'équation (H) :  $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ . En revanche, elle est entièrement déterminée par la connaissance de deux solutions de (H) indépendantes.

Les systèmes étudiés en physique et sciences de l'ingénieur étant en général invariants dans le temps, les équations différentielles linéaires qui les décrivent sont à coefficients constants. La résolution de l'équation homogène se traite alors via l'équation caractéristique.

## B– Recherche d'une solution particulière de l'équation complète

### B.1 Équation d'ordre un

Il existe une méthode mathématique permettant de trouver une solution particulière de (E) :  $y' + a(t)y = b(t)$  à partir de la forme de la solution générale  $y_H$  de l'équation homogène associée.

Pour une équation d'ordre 1, la méthode de variation de la constante<sup>2</sup> ramène la recherche de  $y_0$  à deux quadratures : si  $z = \exp\left(-\int a(t)dt\right)$ , les solutions de l'équation avec second membre sont de la forme  $y = \lambda z$  où  $\lambda$  est une fonction vérifiant  $\lambda'z = b$ . On obtient ainsi une solution particulière de (E)

$$y_0(t) = \left( \int_{t_0}^t b(u) \exp\left(\int_{t_0}^u a(v)dv\right) du \right) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(u)du\right)$$

La solution générale de (E) s'écrit donc :

$$y(t) = \left( \int_{t_0}^t b(u) \exp\left(\int_{t_0}^u a(v)dv\right) du \right) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(u)du\right) + K \exp\left(-\int_{t_0}^t a(u)du\right)$$

En physique, on est souvent confronté à une équation différentielle dont le second membre est un *échelon*, comme dans l'exemple de la charge d'un condensateur à travers une résistance, pour lequel la charge électrique  $s(t)$  du condensateur est régie par l'équation :

$$RC \dot{s} + s = e(t) \quad \text{avec} \quad e(t < 0) = 0 \quad \text{et} \quad e(t > 0) = E.$$

Le physicien invoque des propriétés de causalité pour affirmer que la solution cherchée vérifie  $s(t < 0) = 0$ . On résout l'équation pour  $t > 0$  où  $e(t)$  est alors constante. Elle s'écrit

$$RC \dot{s} + s = E$$

Se pose alors la question de la continuité en 0 de la solution. Divers arguments sont donnés pour justifier la continuité de  $s(t)$ , qui reposent tous sur l'affirmation qu'une grandeur physique (ici le courant) est bornée et que toute primitive d'une fonction bornée est continue.

La résolution de l'équation sur  $\mathbb{R}_+^*$  par la méthode de variation de la constante permet de démontrer qu'il existe une unique solution prolongeable en 0 par  $s(0) = 0$ , ce qui assure un raccordement continu avec la solution nulle sur  $\mathbb{R}_-$ .

La seule solution continue sur  $\mathbb{R}$  est ainsi :

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ s(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

La difficulté de la démarche du physicien pour les étudiants vient du fait que la grandeur  $\dot{s}(t)$  qui est proportionnelle au courant de charge  $i(t)$  est, pour sa part, discontinue dans le cadre du modèle adopté. Ce point trouve une réponse rigoureuse dans le fait que le circuit étant légèrement inductif, l'équation d'évolution s'écrit plutôt :

$$LC \ddot{s} + RC \dot{s} + s = e$$

En adoptant ici un modèle où l'intensité du courant est elle aussi continue et nulle aux dates négatives, c'est-à-dire en utilisant les conditions naturelles  $s(0) = 0$  et  $\dot{s}(0) = 0$ , on obtient un profil de courant avec un maximum  $i_{\max}$  fini à un instant  $\tau$  très proche de 0. Lorsqu'on fait tendre l'inductance  $L$  vers zéro, on trouve que  $\tau \rightarrow 0$  et  $i_{\max} \rightarrow E/R$ , c'est-à-dire qu'on retrouve le modèle initial non inductif. Le modèle inductif devrait systématiquement être présenté aux étudiants sans calcul, à l'aide de logiciels d'intégration numérique, pour leur faire comprendre la « signification » de la discontinuité finie de courant dans le modèle non inductif.

2. Elle figure au programme de mathématiques du premier semestre de première année

## B.2 Équation d'ordre deux

Pour une équation d'ordre 2, la méthode mathématique de variation des constantes permet de construire une solution particulière. Cette méthode est souvent lourde et inadaptée aux équations rencontrées en sciences physiques et sciences de l'ingénieur, qui sont en général à coefficients constants et avec des seconds membres particuliers (fonction échelon ou fonction sinusoïdale).

Pour un second membre échelon, la recherche d'une solution particulière est immédiate.

Pour un second membre sinusoïdal, on recherche une solution particulière de la même forme.

Nous illustrons cette recherche par l'exemple largement utilisé en physique d'un circuit RLC série alimenté par une tension d'entrée sinusoïdale  $e(t) = E \cos(\omega t + \varphi)$ . On cherche, en régime permanent, la tension de sortie  $s(t)$  aux bornes du condensateur. Celle-ci vérifie l'équation différentielle :

$$LC \frac{d^2s}{dt^2} + RC \frac{ds}{dt} + s = e(t)$$

En posant  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (pulsation propre du système) et  $\gamma = \frac{R}{L}$ , l'équation devient :

$$(E) \quad : \quad \frac{d^2s}{dt^2} + \gamma \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E \cos(\omega t + \varphi)$$

Le facteur  $\gamma$  caractérise l'amortissement du système. On tire parti de la linéarité de (E) en introduisant l'équation complexe associée :

$$(F) \quad : \quad \frac{d^2s}{dt^2} + \gamma \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E e^{i(\omega t + \varphi)}$$

On note  $\omega_0^2 e(t)$  le second membre de (F).

Si  $\underline{s}$  est une solution de (F), la demi-somme de  $\underline{s}$  et de son conjugué, soit la partie réelle de  $\underline{s}$ , est solution de (E).

On cherche alors une solution particulière de (F) sous la forme  $\underline{s} = \underline{A} e^{i\omega t}$ , où  $\underline{A}$  est une constante complexe. Cela conduit à l'équation :

$$\underline{A}[(i\omega)^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2] = \omega_0^2 E e^{i\varphi}$$

Elle permet de déterminer  $\underline{A}$  sauf dans le cas où  $\gamma = 0$  et  $\omega = \omega_0$ , correspondant à la résonance d'un système non amorti. La solution particulière ainsi trouvée est alors :

$$\underline{s}(t) = \frac{\omega_0^2}{(i\omega)^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2} E e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \underline{H}(i\omega) \underline{e}(t)$$

$\underline{H}(i\omega)$  est appelé fonction de transfert complexe en physique et transmittance isochrone en sciences de l'ingénieur. Les propriétés de la fonction de transfert complexe sont illustrées par les diagrammes de Bode ou le lieu des pôles de la fraction  $\underline{H}$ .

Cette méthode de recherche d'une solution particulière d'une équation linéaire à coefficients constants avec un second membre sinusoïdal, couramment utilisée dans les enseignements de physique, consiste en fait à résoudre dans l'espace de Fourier l'équation algébrique, transformée de Fourier de l'équation différentielle de départ.

## C– Utilisation de transformations intégrales

Les transformations de Fourier et de Laplace constituent une méthode puissante pour résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients constants qu'elles transforment en équations algébriques. L'étude de ces transformations ne fait pas partie du cours de mathématiques de CPGE, mais elle peut illustrer le cours sur les intégrales à paramètre. Nous présentons ici quelques fondements mathématiques de ces transformations qui justifient leurs applications à l'étude de problèmes issus de la physique ou des sciences de l'ingénieur.

## C.1 Définitions

### 1. La transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'une fonction  $f$  intégrable sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles ou complexes est la fonction  $\hat{f}$  définie par :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

Sous certaines conditions ( $f$  et  $\hat{f}$  intégrables sur  $\mathbb{R}$ ), on dispose de la formule d'inversion qui permet d'exprimer  $f$  comme une superposition de contributions en fréquences :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega.$$

On note  $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$  ou, par abus de langage,  $\mathcal{F}(f(t)) = \hat{f}(\omega)$ .

À  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  près,  $\hat{f}(\omega)$  représente donc l'amplitude complexe de l'exponentielle complexe  $e^{i\omega t}$  de pulsation  $\omega$ <sup>3</sup> dans  $f$ .

Il existe d'autres conventions de définition de la transformée de Fourier de  $f$  ; par exemple :

$\hat{f}_1(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} f(t) dt$ , ou  $\hat{f}_2(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi t} f(t) dt$ . Cela ne change rien aux raisonnements, mais peut modifier les formules d'inversion ou de dérivation.

### 2. La transformée de Laplace unilatérale

Sous réserve d'existence, la transformée de Laplace unilatérale d'une fonction  $f$  (de la variable  $t$ ) définie sur  $\mathbb{R}^+$  est :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

On note encore  $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$  ou  $f(t) \square F(p)$ .  $F$  est l'**image** de  $f$  et  $f$  est l'**originale** de  $F$ . On peut montrer que, s'il est non vide, le domaine d'existence de  $F(p)$  est une demi-droite non majorée de  $\mathbb{R}$  (de la forme  $]p_0, +\infty[$  ( $p_0$  pouvant être égal à  $-\infty$ ) ou  $[p_0, +\infty[$ ).  $p_0$  s'appelle l'abscisse de convergence (ou de sommabilité) de  $f$ . C'est la borne inférieure de l'ensemble des  $p$  pour lesquels la fonction  $t \mapsto f(t)e^{-pt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

La transformation de Laplace unilatérale s'applique aux fonctions causales (nulles sur  $\mathbb{R}^{-*}$ ). Ces fonctions décrivent de nombreux phénomènes physiques dépendant du temps, par exemple l'intensité mesurée dans un circuit électrique (nulle jusqu'au moment où l'interrupteur est actionné). On peut toujours rendre causale une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  en la multipliant par la fonction  $H$  de Heaviside (nulle sur  $\mathbb{R}^{-*}$  et égale à 1 sur  $\mathbb{R}^+$ ).

## C.2 Lien entre ces deux transformations

Il est possible d'étendre la définition de  $\mathcal{L}(f)(p) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$  au cas où la variable  $p$  est complexe. En notant  $x_0$  la borne inférieure de l'ensemble des réels  $x$  pour lesquels la fonction  $t \mapsto f(t)e^{-xt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ , on peut montrer que  $F$  est définie dans le demi-plan ouvert  $\text{Re } z > x_0$ .

Alors, pour  $x > x_0$ ,  $F(x+iy) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} e^{-iyt} dt = \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} [H(t) f(t) e^{-xt}] e^{-iyt} dt = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[H(t) f(t) e^{-xt}](y)$ . Ce lien explique les similarités qui apparaissent dans les propriétés ci-dessous.

## C.3 Propriétés

1. Les transformations de Fourier et de Laplace sont linéaires.

2. Echanges de la translation et de la modulation<sup>4</sup> :

$$\mathcal{F}(f(t - t_0)) = e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega),$$

$$\mathcal{F}(e^{i\omega_0 t} f(t)) = \hat{f}(\omega - \omega_0).$$

3. la pulsation  $\omega$  est ici un réel non nécessairement positif.

4. Les propriétés associées à la translation des variables sont parfois appelées « théorèmes du retard ».

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(p-a)$$

Pour  $t_0 \geq 0$ ,  $\mathcal{L}(H(t-t_0)f(t-t_0)) = e^{-pt_0}F(p)$ .

3. Transformées d'une dérivée :

si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , intégrable sur  $\mathbb{R}$  ainsi que sa dérivée, alors :

$$\widehat{f}'(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega)$$

Généralisation :

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ , intégrable sur  $\mathbb{R}$  ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à  $n$ , alors :

$$\widehat{f}^{(n)}(\omega) = (i\omega)^n \widehat{f}(\omega).$$

Si  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ , sauf éventuellement en 0, mais admet une limite à droite en 0 notée  $f(0^+)$ , dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  avec  $f'$  continue par morceaux et admettant une transformée de Laplace, alors

$$\mathcal{L}(f')(p) = pF(p) - f(0^+)$$

Généralisation<sup>5</sup> :

Sous réserve de la continuité des  $n-1$  dérivées premières de  $f$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , de l'existence de leurs limites à droite en 0, et de la continuité par morceaux de  $f^{(n)}$  sur  $\mathbb{R}^+$ , alors :

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)$$

4. Inversion : si  $f$  et  $\widehat{f}$  sont intégrables sur  $\mathbb{R}$ , alors :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \widehat{f}(\omega) d\omega.$$

La formule d'inversion de la transformée de Laplace (formule de Bromwich-Wagner) fait intervenir une intégrale sur un contour du plan complexe. Nous ne la présentons ni ne l'utiliserons ici.

5. Convolution :

$$\mathcal{F}((f * g)(t)) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)$$

$$\mathcal{L}((f * g)(t)) = F(p) \cdot G(p)$$

6. Transformées de quelques fonctions classiques :

On rappelle que la fonction de Heaviside est égale à 0 sur  $\mathbb{R}^{-*}$  et à 1 sur  $\mathbb{R}^+$ .

$$\begin{aligned} \text{Si } a > 0 \quad H(t)e^{-at} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\omega} \\ \text{Si } a > 0 \quad e^{-a|t|} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \\ \text{Si } a \in \mathbb{C} \quad e^{-at} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p + a} \quad (\text{pour } \operatorname{Re} p > -a) \\ \sin at &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{p^2 + a^2} \\ \cos at &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p}{p^2 + a^2} \end{aligned}$$

Par décomposition en éléments simples et utilisation des théorèmes du retard et de dérivation, on peut trouver les antécédants par les transformations  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{L}$  des fractions rationnelles, permettant ainsi de passer du domaine fréquentiel ou du domaine de Laplace au domaine temporel.

#### C.4 Comportements asymptotiques

1. Théorème de la valeur finale :

Si une fonction causale  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  et admet une limite finie en  $+\infty$ , alors son abscisse de convergence est égale à 0 et  $\lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ .

2. Théorème de la valeur initiale :

Si  $f$  est continue par morceaux et intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ , alors  $\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) = f(0^+)$ .

5. L'apparente complication de cette formule vient des sauts possibles à l'origine de la fonction et de ses dérivées. Ces sauts disparaissent dans une formule analogue pour la transformée de Laplace des distributions, dont l'étude ne sera pas abordée ici.

## C.5 Application à la résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

### 1. Utilisation de la transformation de Fourier

L'objectif de ce paragraphe est de faire le lien entre la transformation de Fourier et la méthode décrite au paragraphe **B.2** pour résoudre l'équation

$$(E) \quad : \quad s''(t) + \gamma s'(t) + \omega_0^2 s(t) = \omega_0^2 e(t)$$

On prend la transformée de Fourier des deux membres de l'équation différentielle (sous réserve de pouvoir appliquer deux fois le théorème de dérivation) :

$$P(i\omega) \hat{s}(\omega) = \omega_0^2 \hat{e}(\omega)$$

où  $P$  est le polynôme  $P(x) = x^2 + \gamma x + \omega_0^2$ .

Sauf dans le cas d'un oscillateur non amorti et à résonance ( $\gamma = 0$  et  $\omega = \omega_0$ ), on peut écrire :

$$\hat{s}(\omega) = \frac{\omega_0^2}{P(i\omega)} \cdot \hat{e}(\omega).$$

La fonction de transfert complexe  $\underline{H}$  du système, appelée transmittance isochrone en sciences de l'ingénieur, est définie comme le rapport «  $\frac{\text{effet}}{\text{cause}}$  » dans le domaine fréquentiel. Elle vaut ici

$\underline{H}(i\omega) = \frac{\omega_0^2}{P(i\omega)}$ . Chaque composante fréquentielle  $\hat{e}(\omega)$  du signal d'entrée  $e(t)$  est multipliée (amplifiée ou atténuée) par la fonction de réponse. Le système fonctionne comme un filtre fréquentiel. Ceci justifie la méthode présentée au paragraphe **B.2**, utilisée en physique, dans laquelle on étudie spécifiquement la réponse du système à une composante fréquentielle du signal d'entrée.

La transformée de Fourier inverse  $A(t)$  de  $\underline{H}(i\omega)$  permet de résoudre l'équation différentielle (E) c'est-à-dire de déterminer le signal de sortie temporel grâce à la relation  $s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(A * e)(t)$ .

Nous allons à présent expliciter la fonction  $A(t)$ .

$$\underline{H}(i\omega) = \frac{\hat{s}(\omega)}{\hat{e}(\omega)} = \frac{\omega_0^2}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{2\omega_1} \left[ \frac{1}{\omega_1 - \omega + i\gamma/2} + \frac{1}{\omega_1 + \omega - i\gamma/2} \right]$$

$$\text{où } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$\underline{H}(i\omega) = \frac{i\omega_0^2}{2\omega_1} \left[ \frac{1}{i(\omega + \omega_1) + \gamma/2} - \frac{1}{i(\omega - \omega_1) + \gamma/2} \right] = \sqrt{2\pi} \frac{i\omega_0^2}{2\omega_1} \mathcal{F}([e^{-i\omega_1 t} - e^{i\omega_1 t}] H(t) e^{-\gamma t/2})$$

Donc  $\underline{H}(i\omega) = \mathcal{F}(A(t))$  avec  $A(t) = \sqrt{2\pi} \frac{\omega_0^2}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) H(t) e^{-\gamma t/2}$ . La fonction  $A$  contient toutes les informations du système et permet d'exprimer le signal de sortie  $s(t)$  en fonction du signal d'entrée  $e(t)$ . La dépendance est linéaire, selon la relation :  $s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(A * e)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} A(t - \tau) e(\tau) d\tau$ .

### 2. Utilisation de la transformation de Laplace

Contrairement à la transformation de Fourier, la transformation de Laplace prend en compte les conditions initiales et permet d'étudier le régime transitoire, qui précède le régime permanent d'un système. On s'intéresse à la résolution du système forcé (3) vérifiant en plus les conditions initiales

$$\begin{cases} s(0) = s_0 \\ s'(0) = s_1 \end{cases}$$

On prend la transformée de Laplace unilatérale des deux membres de l'équation (E), ce qui donne :

$$(p^2 + \gamma p + \omega_0^2)S(p) = s_1 + s_0 p + \gamma s_0 + \omega_0^2 E(p)$$

$$\text{D'où } S(p) = \frac{s_1 + s_0 p + \gamma s_0}{p^2 + \gamma p + \omega_0^2} + \frac{\omega_0^2 E(p)}{p^2 + \gamma p + \omega_0^2}.$$

La réponse  $S(p)$  à l'excitation  $E(p)$  est la somme de deux réponses :

- la réponse  $\frac{s_1 + s_0 p + \gamma s_0}{p^2 + \gamma p + \omega_0^2}$ , dite *libre*, due aux conditions initiales ;
- la réponse  $\frac{\omega_0^2 E(p)}{p^2 + \gamma p + \omega_0^2} = E(p) \cdot H(p)$ , dite *forcée*, due à l'excitation.

La fonction de réponse  $H(p)$  obtenue ici est identique à la fonction de transfert complexe  $\underline{H}(i\omega)$ , au changement de variable près  $p = i\omega$ . La réponse libre est l'image par  $\mathcal{L}$  de la solution temporelle  $y_H(t)$  de l'équation homogène associée à (3) vérifiant  $s_H(0) = s_0$  et  $s'_H(0) = s_1$ .

Le produit de convolution de  $e(t)$  par l'originale  $h(t)$  de  $H(p)$  est une solution particulière de (E).

- 1<sup>er</sup>cas : le polynôme caractéristique  $p^2 + \gamma p + \omega_0^2$  admet dans  $\mathbb{C}$  deux racines distinctes  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

On montre par le calcul que  $h(t) = \omega_0^2 \frac{e^{\omega_1 t} - e^{\omega_2 t}}{\omega_1 - \omega_2} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0^2}{p^2 + \gamma p + \omega_0^2}$  et qu'il existe deux constantes  $A_1$  et  $A_2$  dépendant de  $s_0$  et  $s_1$  telles que  $A_1 e^{\omega_1 t} + A_2 e^{\omega_2 t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{y_1 + y_0 p + \gamma y_0}{p^2 + \gamma p + \omega_0^2}$ .

Le signal de sortie correspondant à l'excitation  $e(t)$  et aux conditions initiales  $y(0) = y_0$  et  $y'(0) = y_1$  est :

$$y(t) = A_1 e^{\omega_1 t} + A_2 e^{\omega_2 t} + \int_0^t h(t-\tau) e(\tau) d\tau$$

On notera que la convolution traduit le *principe de causalité*, selon lequel l'effet ne peut précéder la cause, puisque l'intégration est limitée aux seuls temps  $\tau \leq t$ .

- Si les parties réelles de  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont toutes les deux strictement négatives, le système est stable : aux temps longs, seul compte le terme *forcé*  $\int_0^t h(t-\tau) e(\tau) d\tau$ .

- Si l'une des racines  $\omega_i$  est imaginaire pure, alors l'autre aussi puisque les coefficients du polynôme sont réels. Dans ce cas,  $y_H(t)$  ne tend pas vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$  : les pôles imaginaires purs donnent des contributions oscillatoires non amorties, même aux temps longs. Le système n'est pas stable.

- 2<sup>ecas</sup> : le polynôme caractéristique  $p^2 + \gamma p + \omega_0^2$  admet une racine double  $\omega$ .

On montre alors que  $h(t) = \omega_0^2 t e^{\omega t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0^2}{p^2 + \gamma p + \omega_0^2}$  et qu'il existe une constante  $A_1$  dépendant de  $s_0$  et  $s_1$  telle que  $(x_0 + A_1 t) e^{\omega t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s_1 + p s_0 + \gamma s_0}{p^2 + \gamma p + \omega_0^2}$ .

Le signal de sortie correspondant à l'excitation  $e(t)$  et aux conditions initiales  $s(0) = s_0$  et  $s'(0) = s_1$  est alors :

$$y(t) = (y_0 + A_1 t) e^{\omega t} + \int_0^t h(t-\tau) e(\tau) d\tau.$$

Cette méthode est habituellement utilisée en sciences de l'ingénieur pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants. La plupart du temps on se contente de déterminer la solution, et en particulier la solution forcée, dans l'espace de Laplace, sans expliciter la solution  $y(t)$  dans l'espace réel. Cette méthode est alors formellement équivalente à rechercher la réponse du système à une excitation  $e(t) = a H(t) e^{\rho t}$ .

## D– Facteur de qualité et coefficient d'amortissement

Les méthodes exposées ci-dessus se généralisent à des équations différentielles d'ordre deux, linéaires à coefficients constants dont le second membre est de la forme  $a e(t) + b \frac{de}{dt}$ . La fonction de transfert complexe reste une fraction rationnelle de la variable  $i\omega$ . Elle s'écrit sous forme canonique :

$$\underline{H}(i\omega) = \frac{N(i\omega)}{1 + \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{i\omega}{\omega_0} + \left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

où  $N$  est un polynôme.

Il est d'usage d'introduire un paramètre adimensionné caractérisant l'amortissement, mais l'usage diffère

selon les disciplines : ainsi, en physique, on introduit le facteur de qualité  $Q$ , tandis qu'en sciences de l'ingénieur, on utilise le coefficient d'amortissement  $m$  (noté aussi  $\xi$ ). Ces quantités sont définies par :

$$Q = \frac{1}{2m} = \frac{\omega_0}{\gamma}$$

d'où les expressions des formes réduites de la fonction de transfert complexe :

$$\underline{H}(i\omega) = \frac{N(i\omega)}{1 + \frac{i\omega}{Q\omega_0} + \left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{N(i\omega)}{1 + 2m\frac{i\omega}{\omega_0} + \left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

La difficulté provient de la définition du facteur de qualité. Celui-là est souvent associé à la largeur de la résonance, par l'égalité :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

où  $\Delta\omega$  est la largeur de la bande passante à  $-3\text{dB}$ . Cette relation n'est exacte que si le polynôme  $N(i\omega)$  se réduit au seul monôme linéaire en  $i\omega$  (soit  $N(x) = bx$ ), ce qui, par exemple est le cas de la résonance en intensité du circuit RLC série, mais pas de sa résonance en tension étudiée au paragraphe B.2. Elle n'est vraie que de façon approchée pour une résonance quelconque, pour de faibles coefficients d'amortissement ( $m \ll 1$  ou  $Q \gg 1$ ).

## E– Intégration et intégrale première d'une équation différentielle

Le verbe « intégrer » provoque des difficultés lorsqu'il s'applique aux équations différentielles. En effet, ce verbe se réfère en premier lieu au calcul de l'intégrale (ou des primitives) d'une fonction, alors qu'« intégrer une équation différentielle » signifie « en rechercher les solutions ». Il convient de remarquer que cette recherche se résume rarement à des calculs d'intégrales. La terminologie « intégrer une équation différentielle » introduisant une confusion, il serait préférable de la remplacer par « résoudre une équation différentielle ».

La recherche d'une solution peut se faire à l'aide d'une intégrale première. Exprimer une intégrale première (à partir d'un calcul d'intégrale portant sur l'équation différentielle multipliée par un facteur intégrant) permet de transformer l'équation différentielle initiale en une équation différentielle d'ordre inférieur, et d'en déduire une analyse qualitative des solutions. Mais cela ne constitue qu'une étape dans la résolution de l'équation (c'est-à-dire l'explicitation de ses solutions).

En physique, le premier contact avec la notion d'équation différentielle se fait en terminale S sur le cas, très particulier, du mouvement de chute libre dans le champ de pesanteur. Intégrer l'équation :

$$\ddot{z} = -g$$

consiste ici à prendre deux fois de suite une primitive pour obtenir :

$$\dot{z} = -gt + \alpha \quad \text{puis} \quad z = -\frac{gt^2}{2} + \alpha t + \beta$$

Il n'est pas rare que des étudiants de première année de CPGE généralisent de manière erronée cette procédure, ce qui les amène, dans le cas de l'oscillateur harmonique, à écrire la séquence de calculs ci-dessous :

$$\ddot{x} = -x \quad \text{donc} \quad \dot{x} = -x t + \alpha \quad \text{puis} \quad x = -\frac{x t^2}{2} + \alpha t + \beta \quad \text{et} \quad x = \frac{\alpha t + \beta}{1 + t^2/2}$$

## F– Linéarisation d'une équation différentielle

### Système autonome

Un système différentiel 2 – 2 est dit autonome lorsqu'il s'écrit :

$$\begin{cases} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{cases}$$

De tels systèmes se rencontrent notamment pour traiter les équations d'ordre deux de la forme  $x'' = g(x, x')$  qui se ramènent à un système autonome de deux équations différentielles d'ordre un :

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= g(x, y) \end{cases}$$

Sauf dans des cas très particuliers, on ne sait pas résoudre un tel système. On s'intéresse cependant à l'étude de la stabilité de ses solutions au voisinage d'un point d'équilibre, c'est-à-dire d'un point vérifiant  $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ . Pour l'étudier, on linéarise ce système au voisinage de  $(x_0, y_0)$ , ce qui conduit à un nouveau système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ y' &= (x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Partant de l'idée que la solution exacte d'un problème approché est une solution approchée du problème exact de départ, on admet généralement que les solutions du système différentiel initial ont même allure que celles de son linéarisé au voisinage d'un point d'équilibre.

Cette heuristique est exacte dans le cas de l'équation du pendule :

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$$

dont le système linéarisé est :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = y \\ \dot{y} = -\omega^2\theta + \gamma y \end{cases}$$

Cependant, la généralisation est abusive lorsque l'une des valeurs propres de la matrice du système linéarisé est imaginaire pure ou nulle. Les exemples suivants permettent d'illustrer cette affirmation.

### Exemple 1

$$\begin{cases} x' = -y + \varepsilon(x^2 + y^2)x \\ y' = x + \varepsilon(x^2 + y^2)y \end{cases}$$

Le système linéarisé en  $(0,0)$  est

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

dont les trajectoires sont des cercles.

Les figures suivantes représentent les trajectoires des solutions  $t \mapsto (x(t), y(t))$  dans l'espace des phases  $(x, y)$ .

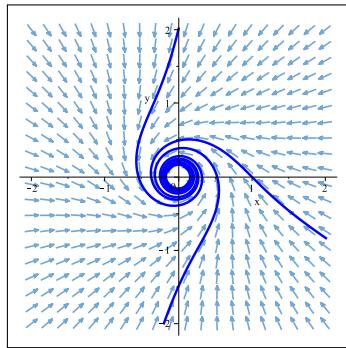


FIGURE 1 – Cas où  $\varepsilon < 0$

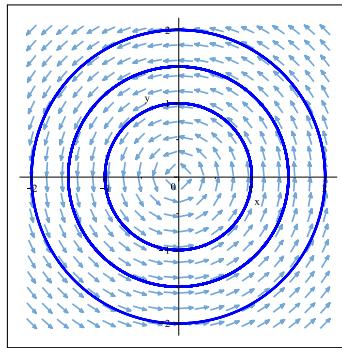


FIGURE 2 – Cas où  $\varepsilon = 0$

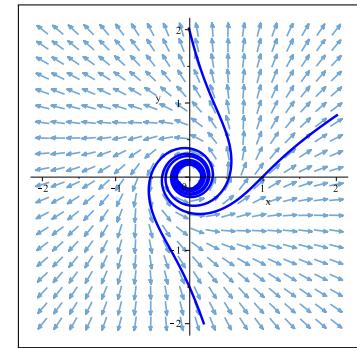


FIGURE 3 – Cas où  $\varepsilon > 0$

Les trajectoires du système initial spiralent vers l'origine si  $\varepsilon < 0$  et s'en éloignent si  $\varepsilon > 0$ . Dans les deux cas, leurs allures diffèrent de celle du système linéarisé représenté par la figure 2.

### Exemple 2

Considérons le système :

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = -y \end{cases}$$

Son seul point d'équilibre est l'origine, alors que son linéarisé admet comme points d'équilibre tous les points de la droite d'équation  $y = 0$ .

### Exemple de linéarisation d'un système d'équations aux dérivées partielles

Dans la linéarisation de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles en physique, l'infiniment petit par rapport auquel se fait le développement limité n'est pas explicite. C'est par exemple le cas en acoustique, pour obtenir l'équation de propagation des ondes sonores. Les champs de pression  $p(x, t)$ , de masse volumique  $\mu(x, t)$  et de vitesse  $v(x, t)$  sont reliés par les équations non linéaires :

$$\mu \frac{\partial v}{\partial t} + \mu v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{et} \quad \mu \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

c'est-à-dire respectivement les équations d'Euler et de continuité, auxquelles on adjoint l'équation de définition de la compressibilité adiabatique  $\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_S = \mu \chi s$ .

En acoustique, les écarts entre la pression, la masse volumique et la vitesse, et leurs valeurs à l'équilibre, en l'absence d'onde sonore, sont faibles. On pose donc :

$$p(x, t) = p_0 + p_1(x, t) \quad ; \quad \mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t) \quad \text{et} \quad v(x, t) = v_1(x, t)$$

et on affirme que les champs  $p_1$ ,  $\mu_1$  et  $v_1$  sont des infiniment petits de même ordre ainsi que leurs dérivées premières par rapport à  $x$  et  $t$ . Comparer les ordres de grandeur de ces quantités n'a évidemment pas de sens, s'agissant de grandeurs physiques de nature différente, n'ayant pas la même dimension. En réalité l'infiniment petit commun  $\varepsilon$  est :

$$\frac{p_1}{p_0} \quad ; \quad \frac{\mu_1}{\mu_0} \quad ; \quad \frac{v_1 T}{\lambda} \quad ; \quad \frac{\lambda}{p_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad ; \quad \frac{T}{p_0} \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\lambda}{\mu_0} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} \quad ; \quad \frac{T}{\mu_0} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} \quad ; \quad T \frac{\partial v_1}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial v_1}{\partial t}$$

où  $T$  est la période du son et  $\lambda$  sa longueur d'onde. Les quantités  $p_1$ ,  $\mu_1$  et  $v_1$  sont proportionnelles à  $\varepsilon$  (ou d'ordre 1 en  $\varepsilon$ ). En linéarisant les équations initiales par rapport à  $\varepsilon$ , on obtient :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad \text{et} \quad \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = 0$$

Pour les solutions  $p_1$ ,  $\mu_1$  et  $v_1$  de ces équations, les infiniment petits cités plus haut sont bien tous du même ordre.

On peut noter aussi qu'ici le physicien se garde bien d'utiliser la notation différentielle pour les petites variations : il note  $p_1$  et non  $dp$  car, dans ce contexte, c'est  $p_1$  qui devient la grandeur physique utile.

## G– Changement de variables

La résolution de certaines équations aux dérivées partielles peut faire appel à des changements de variables. Un exemple classique en acoustique est l'exploitation d'une *relation de couplage* de la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = C \frac{\partial p}{\partial x}$$

entre deux grandeurs (ici la surpression  $p$  et la vitesse  $v$  associées à la propagation d'une onde sonore) dépendant de deux variables  $x$  et  $t$ . Dans le cas particulier d'une *onde progressive* de vitesse  $c$ , les fonctions  $p$  et  $v$  dépendent de  $x$  et  $t$  par l'intermédiaire d'une seule variable  $u = x - ct$ , ce que le physicien écrit souvent :

$$p(x, t) = p(x - ct) \quad \text{et} \quad v(x, t) = v(x - ct)$$

en notant une fois de plus par la même lettre  $p$  deux fonctions de natures différentes (l'une dépendant d'une seule variable et l'autre de deux). Les champs  $p$  et  $v$  étant simultanément nuls en l'absence d'onde, il s'agit d'établir la relation :

$$C p(x, t) = -c v(x, t)$$

### Première démarche

Le physicien ne donne pas de nom à la variable  $x - ct$  et donne le même nom aux fonctions  $p(x, t)$  et  $p(x - ct)$ . Alors, uniquement sur la classe des fonctions vérifiant  $f(x, t) = f(x - ct)$ , les opérateurs de dérivation partielle par rapport à  $t$  et à  $x$  vérifient :

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial x}$$

ce qui donne en remplaçant dans la relation de couplage :

$$-c \frac{\partial v}{\partial x} = C \frac{\partial p}{\partial x}$$

Cette relation s'intègre en  $-cv(x, t) = Cp(x, t) + K(t)$ .

L'intégration se faisant à  $t$  constant, il est important de remarquer que  $K$  est une constante par rapport à  $x$ , mais une fonction de  $t$ . La nullité de  $p$  et  $v$  en l'absence d'onde conduit ensuite à  $K = 0$ , et on obtient le résultat annoncé.

### Deuxième démarche

Plus raisonnablement, on donne un nom  $u = x - ct$  à la variable intermédiaire, mais on persiste à donner le même nom aux fonctions  $p(x, t)$  et  $p(x - ct)$  car il s'agit de la même grandeur physique. On calcule alors les dérivées partielles utiles en exploitant le théorème de dérivation d'une fonction composée, l'une des variables  $x$  ou  $t$  étant bloquée :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_x = \frac{dv}{du} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_x = -c \frac{dv}{du} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_t = \frac{dv}{du} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_t = \frac{dv}{du}$$

de telle sorte que la relation de couplage se simplifie en :

$$-c \frac{dv}{du} = C \frac{dp}{du} \quad \text{qui s'intègre en} \quad -c v = C p + K$$

où  $K$  est une vraie constante dont la nullité est garantie par la nullité simultanée des deux fonctions. On obtient alors le résultat attendu.

Le mathématicien reprendrait cette démarche en nommant  $u = x - ct$  et en donnant en outre des noms différents aux fonctions  $p(x, t) = g(u)$  et  $v(x, t) = f(u)$ , d'où :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{df}{du} \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dg}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dg}{du} \quad \text{puis} \quad -c \frac{df}{du} = C \frac{dg}{du}$$

qui s'intègre en :

$$-c f(u) = C g(u) + K$$

soit, compte tenu de la condition initiale :

$$C p(x, t) = -c v(x, t) + K$$

En prenant en compte le fait qu'en l'absence d'onde,  $p = v = 0$ , on obtient la relation annoncée.

On peut aussi éviter l'intégration directe de l'équation aux dérivées partielles en opérant sur des ondes harmoniques pour montrer que :

$$C p_\omega(x, t) = -c v_\omega(x, t)$$

pour chaque composante de Fourier d'une onde quelconque. Comme  $c$  et  $C$  sont indépendantes de  $\omega$ , on obtient la même propriété pour l'onde quelconque par superposition. Cette démarche correspond davantage à l'esprit du programme de physique de PC.

## VIII – Découpage infinitésimal et intégration

Le physicien utilise des intégrales simples, doubles, triples de scalaires ou de vecteurs sur des domaines d'intégration variés : courbes et surfaces, fermées ou non, volumes. Le contenu physique est toujours attaché à une opération impliquant le *découpage en éléments infinitésimaux*, puis l'intégration proprement dite. L'expérience montre que les étudiants n'ont pas trop de difficultés à passer de l'intégrale d'une fonction scalaire sur un segment à une « *intégrale de physicien* ».

La notation  $\int_{(D)} f$  est peu utilisée en physique : on retrouve là le problème du statut de  $f$  qui en mathématiques est une fonction, alors qu'en physique, il s'agit d'une grandeur physique dépendant d'une variable qui est naturellement explicitée via la notation de l'élément différentiel d'intégration :

$$\int f(x) dx, \quad \iint_{(S)} f dS \quad \text{ou} \quad \iiint_{(V)} f d\tau$$

L'intérêt de ces notations pour le physicien est aussi d'assurer l'homogénéité de l'expression si  $dx$  est dimensionné. Enfin ces notations rappellent explicitement l'opération « *somme sur un découpage* », ce qui est essentiel pour le physicien et qui s'avère en pratique crucial pour les intégrales de vecteurs.

### Intégrales de vecteurs

Le point délicat concerne le calcul explicite des intégrales de vecteurs qui n'ont pas une direction constante sur le domaine d'intégration. Un exemple classique est l'intégrale :

$$\oint_{(C)} d\ell \vec{u}_r$$

calculée sur un cercle  $(C)$  de centre  $O$  et de rayon  $R$ , où  $\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire radial. Beaucoup d'étudiants oublient que la direction du vecteur  $\vec{u}_r$  dépend du point générique de  $(C)$  où il est construit, et écrivent :

$$\oint_{(C)} d\ell \vec{u}_r = 2\pi R \vec{u}_r$$

sans se préoccuper d'ailleurs de quel pourrait être ce vecteur  $\vec{u}_r$  particulier qui apparaît dans le résultat final. Ils se laissent ici abuser par un formalisme qui consiste sans s'en rendre compte à « primitiver » abusivement un vecteur. Les étudiants ne voient en général pas le lien entre l'erreur qu'ils commettent et la propriété :

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \neq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

Le lien avec la démarche correcte consistant à projeter sur des directions fixes  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  et à utiliser la linéarité de la projection, échappe à beaucoup d'étudiants même lorsqu'ils ont su écrire :

$$\vec{u}_x \cdot \oint_{(C)} d\ell \vec{u}_r = \oint_{(C)} d\ell \vec{u}_r \cdot \vec{u}_x = \oint_{(C)} R \cos \theta d\theta = 0$$

car ils oublient la sommation sous-jacente de vecteurs élémentaires.

## IX – Annexes

Les tableaux ci-dessous précisent des différences de notation ou de vocabulaire en mathématiques, physique-chimie et sciences de l'ingénieur. Ils indiquent la chronologie de l'introduction de certaines notions dans la formation des élèves, et alertent sur quelques obstacles à une bonne compréhension.

### A – Nombres complexes

Mathématiques	Physique-Chimie	Sciences de l'Ingénieur
<b>Forme trigonométrique</b> Le module d'un nombre complexe est positif ou nul. Un nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments.	La forme trigonométrique utilisée est $re^{i\theta}$ avec $r \geq 0$ . Le module est associé à l'amplitude ou valeur maximale, l'argument à la phase. Il n'est pas toujours nécessaire de donner une forme explicite de l'argument $\theta$ . Il est défini (à $2\pi$ près) par les valeurs de deux de ses lignes trigonométriques ( $\cos\theta$ , $\sin\theta$ , $\tan\theta$ ). La connaissance de la seule tangente ne suffit pas.	Un nombre complexe est noté sous l'une des formes : $z = a + jb$ , $z = \rho(\cos(\theta) + j \sin(\theta))$ ou bien $z = \rho e^{j\theta}$ . L'argument est déterminé comme en physique-chimie.
<b>Notations</b> $i$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ ; $j$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$ .	En optique, en mécanique quantique et pour tous les phénomènes ondulatoires, on utilise $i$ comme en mathématiques ; en électrocinétique et en mécanique, on note $j$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ .	On note $j$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ .

☞ Il est déconseillé de noter  $\sqrt{\Delta}$  ou  $\Delta^{\frac{1}{2}}$  une racine carrée du discriminant dans  $\mathbb{C}$ . Ceci est une source de confusion pour les élèves car tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées. Pour la même raison, le nombre complexe  $i$  ne saurait être défini par  $i^2 = -1$ .

- L'égalité  $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$  suppose que  $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ , et n'est donc pas vraie en toute généralité.

## B– Géométrie du plan et de l'espace

Mathématiques	Physique-Chimie	Sciences de l'Ingénieur
<p><b>Repères et coordonnées</b></p> <p>Les repères sont souvent notés <math>\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})</math> ou <math>\mathcal{R}(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)</math> et les coordonnées cartésiennes <math>(x, y, z)</math>, <math>(x_1, x_2, x_3)</math> ou <math>(x_M, y_M, z_M)</math>. Après changement de repère, on peut écrire <math>(x', y', z')</math> ou <math>(x'_1, x'_2, x'_3)</math>.</p> <p>En algèbre linéaire, les vecteurs peuvent être écrits sans flèche, en particulier lorsqu'ils n'appartiennent pas à <math>\mathbb{R}^n</math>. Exemple : une application <math>u</math> est linéaire si pour tous vecteurs <math>x</math> et <math>y</math> de <math>E</math> et tout scalaire <math>\alpha</math>, on a <math>u(\alpha x + y) = \alpha u(x) + u(y)</math>.</p>	<p>Les repères sont notés <math>\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)</math> ou <math>\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)</math> et les coordonnées cartésiennes <math>(x, y, z)</math>.</p> <p>Les bases sont toujours orthonormées.</p>	<p>Les repères utilisés sont toujours orthonormés. Pour les vecteurs de base, il n'y a pas de notation imposée : on peut ainsi noter les bases <math>(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)</math>, ou <math>(\vec{i}_i, \vec{j}_i, \vec{k}_i)</math>, voire <math>(\vec{u}_i, \vec{v}_i, \vec{w}_i)</math>, l'indice <math>i</math> étant relatif au solide auquel est attaché le repère. L'origine n'est pas nécessairement notée <math>O</math> (on évite cependant les lettres <math>P</math> et <math>M</math>, plutôt réservées à des points courants) ; elle peut être indiquée par le solide considéré : <math>O_i</math> ou <math>A_i</math>. L'indice étant lié au solide et non pas à une direction, on n'utilise donc pas de base notée <math>(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)</math>. Des flèches sont systématiquement mises sur les vecteurs. Les référentiels utilisés ont des directions fixes dans l'espace. Les coordonnées cartésiennes sont généralement notées : <math>x(t), y(t), z(t)</math>. On aura ainsi <math>\overrightarrow{O_i M} = x(t) \vec{x}_i + y(t) \vec{y}_i + z(t) \vec{z}_i</math>.</p>
<p><b>Coordonnées polaires</b></p> <p>Le repère polaire est noté <math>(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))</math> ou bien <math>(O, \vec{u}(\theta), \vec{u}'(\theta))</math>.</p> <p>Les coordonnées polaires <math>(r, \theta)</math> sont définies par</p> $\overrightarrow{OM}(\theta) = r \vec{u}(\theta)$ <p>soit <math>x = r \cos(\theta)</math> et <math>y = r \sin(\theta)</math> avec <math>r \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}</math>.</p> <p><math>r</math>, défini comme la mesure algébrique du vecteur <math>\overrightarrow{OM}</math> sur le vecteur <math>\vec{u}(\theta)</math> peut donc être nul, positif ou négatif.</p>	<p>Le repère polaire est noté <math>(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)</math> ou bien <math>(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)</math>.</p> <p>On note <math>\rho</math> ou <math>r</math> la coordonnée radiale. On impose <math>r \geq 0</math>.</p> <p>Donc <math>r = \ \overrightarrow{OM}\ </math>.</p>	

### Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont notées  $(r, \theta, \varphi)$  ou  $(\rho, \theta, \varphi)$ , telles que :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r} = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \overrightarrow{u_x} + r \sin(\theta) \sin(\varphi) \overrightarrow{u_y} + r \cos(\theta) \overrightarrow{u_z}$$

Il est souvent imposé  $r \geq 0$ , et  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Il y a un risque de confusion entre  $r$  et la coordonnée radiale en coordonnées cylindriques, mais aucune notation ne s'est imposée pour les distinguer.

### Dérivées vectorielles

#### Produit scalaire et produit vectoriel

Produit scalaire noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$  ou  $(\vec{u}|\vec{v})$ , permet de calculer des cosinus.

Produit mixte noté  $[\vec{u}, \vec{v}]$  ou  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ , permet de calculer des sinus.

Produit vectoriel noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ .

Le produit scalaire est noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  ou  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ . Il est utilisé pour les calculs de distances, de cosinus et de sinus d'angles, la recherche de projets orthogonaux, la détermination des équations d'un cercle et d'une sphère (caractérisés par leur centre et leur rayon), et du plan tangent à une surface en un point.

Le produit vectoriel est noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ .

La dérivée d'un vecteur  $\vec{V}$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_i$  se note  $\left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_i}$

On utilise largement le produit scalaire et le produit mixte, avec sa propriété d'invariance par permutation circulaire.

Les produits scalaire et vectoriel sont rarement calculés à l'aide des normes et du cosinus ou sinus. Les expressions des vecteurs sont laissées avec leur expression minimale, avec l'utilisation éventuelle de vecteurs unitaires de bases orthonormées différentes. On exprimera par exemple une vitesse sous la forme  $v_1(t)\vec{x}_i + v_2(t)\vec{y}_i$  sans projeter le vecteur  $\vec{y}_i$  dans la base  $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ .

Le produit vectoriel est noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ . Il peut être utilisé même si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas orthogonaux. On ne le calcule pas en utilisant des déterminants, mais à l'aide de ses propriétés géométriques.

## Mathématiques

### Transformations du plan et de l'espace

Dans le chapitre sur les nombres complexes sont définies les rotations planes de centre  $O$ , les translations, les homothéties de centre  $O$ , la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

Dans le cours sur les études de fonctions sont définies les translations, les symétries par rapport à  $O$ , par rapport à l'axe des ordonnées ou la première bissectrice. En fin de première année de CPGE sont définies les projections orthogonales sur une droite ou sur un plan, les rotations vectorielles et les réflexions vectorielles planes.

### Géométrie du triangle

Vue au collège.

## Physique-Chimie

Transformations de l'espace utilisées en physique et chimie : translations, rotations, symétrie par rapport à un point, symétrie par rapport à un plan, et leurs composées (encore appelées produits).

## Sciences de l'Ingénieur

Utilisation du théorème de Thalès.

## C – Mécanique, électricité

### Physique-Chimie

#### Cinématique

La vitesse du point  $A$  appartenant au solide 2 par rapport au solide 1, ou l'image du point  $A$  par le champ des vecteurs vitesses du solide 2 par rapport au solide 1, est notée  $\vec{V}(A \in 2/1)$ ,  $\vec{V}(A, 2/1)$ ,  $\vec{V}_{2/1}(A)$  ou  $\vec{V}_{2/1}^A$ .

### Sciences de l'Ingénieur

**Mécanique**

Dans le domaine de la mécanique, les lois, principes et théorèmes sont nommés différemment en physique et en sciences de l'ingénieur.

- Le *principe d'inertie* est encore appelé *première loi de Newton*, c'est en fait la définition d'un référentiel galiléen.
- La *loi de la quantité de mouvement* (pour un point matériel) est parfois désignée sous les noms de *principe fondamental de la dynamique* ou de *deuxième loi de Newton*.
- Le *principe des actions réciproques* est parfois appelé *principe de l'action et de la réaction* ou *troisième loi de Newton*.

Pour un système déformable ou un solide, on distingue :

- la *loi* (ou théorème) *de la quantité de mouvement*, qui est aussi appelée *théorème de la résultante cinétique*,
- la *loi* (ou théorème) *du moment cinétique*.

**Électronique**

Une grandeur sinusoïdale est notée :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

En sciences de l'ingénieur, ils sont appelés :

- le *théorème de la résultante dynamique* (ou théorème de la résultante statique),
- le *théorème du moment dynamique* (ou théorème du moment statique).

En sciences de l'ingénieur, la même grandeur est notée :

$$u(t) = U_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

en faisant apparaître la valeur efficace  $U_{\text{eff}}$ , de façon à faciliter l'obtention des expressions des puissances active, réactive et apparente.