A.M. VIII - GRADIENT

1. Gradient d'une fonction

1.1. Coordonnées cartésiennes

• Pour une grandeur physique dépendant de la position dans l'espace, par exemple le potentiel électrique : $V = V(M)$, on peut repérer le point M (où on mesure le potentiel) par le vecteur $\overrightarrow{OM} = x\ \overrightarrow{u_x} + y\ \overrightarrow{u_y} + z\ \overrightarrow{u_z}$, ou par ses coordonnées $\{x, y, z\}$ sur la base cartésienne $\left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$:

$$V = V(M) = V(x, y, z).$$

Lors d'un changement du point M, pour des variations dx, dy et dz des coordonnées, la variation infinitésimale dV correspond à :

$$dV(x, y, z) = \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]_{y,z} dx + \left[\frac{\partial V}{\partial y}\right]_{x,z} dy + \left[\frac{\partial V}{\partial z}\right]_{x,y} dz.$$

Or, cette variation peut s'écrire de façon plus "compacte" comme le produit scalaire du déplacement infinitésimal : $d\overrightarrow{OM} = dx\ \overrightarrow{u_x} + dy\ \overrightarrow{u_y} + dz\ \overrightarrow{u_z}$ par le vecteur "gradient" de V, noté $\vec{\nabla}V$ (ou $\overrightarrow{\text{grad}}V$) et défini de telle manière que :

$$dV = \vec{\nabla}V \cdot d\overrightarrow{OM} \quad \text{(relation de définition),}$$

ce qui correspond à :

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\ \overrightarrow{u_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\ \overrightarrow{u_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\ \overrightarrow{u_z}.$$

• L'utilisation de la notation "gradient" permet ainsi de simplifier l'écriture des dérivées partielles, en notant à la fois l'effet des trois coordonnées spatiales.

Par exemple, en l'absence d'effets magnétiques variables, le champ électrique vérifie la propriété : $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$.

1.2. Coordonnées polaires

• Il faut toutefois prendre garde à ne pas généraliser trop vite : l'écriture du gradient en coordonnées cylindriques ou sphériques existe mais elle est moins évidente.

• En se limitant pour simplifier aux coordonnées polaires $\{r, \theta\}$ dans le plan, on décrit la position d'un point sous la forme : $\overrightarrow{OM} = r\ \overrightarrow{u_r}(\theta)$ correspondant, pour un déplacement infinitésimal dans le plan, à :

$$d\overrightarrow{OM} = \left[\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}\right]_\theta dr + \left[\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right]_r d\theta = dr\ \overrightarrow{u_r} + r\, d\theta\ \overrightarrow{u_\theta}\ .$$

Lors d'un changement du point M, pour des variations dr et $d\theta$ des coordonnées, la variation infinitésimale dV correspond à :

$$dV(r, \theta) = \left[\frac{\partial V}{\partial r}\right]_\theta dr + \left[\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]_r d\theta.$$

Pour écrire cette variation de façon plus “compacte” comme le produit scalaire $dV = \vec{\nabla} V \cdot d\overrightarrow{OM}$ (relation de définition), le gradient en coordonnées polaires doit correspondre à :

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\ \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\ \overrightarrow{u_\theta}\ .$$

• Cette méthode peut se généraliser aux autres systèmes de coordonnées en repartant de leurs définitions.

2. Gradient et courbes de niveau

• Pour décrire une portion réduite de la surface de la Terre (en négligeant le fait que la Terre est sphérique), on peut repérer la position au sol par deux coordonnées cartésiennes (x, y) et décrire le relief par l'altitude $h(x, y)$ du sol par rapport au niveau de la mer.

On trace alors sur les cartes géographiques des “courbes de niveau” (lieu des points d'égale altitude) ayant des équations de la forme : $h(x, y) = h_0$.

Le gradient de l'altitude $\vec{\nabla}h$ (orienté selon la montée) décrit alors la “direction de plus grande pente” correspondant (au sens près) à l'écoulement de l'eau de pluie (vers le bas). En particulier, le gradient de l'altitude est orthogonal aux courbes de niveau.

En notant $d\ell$ un déplacement infinitésimal dans la direction de la pente, la mesure algébrique du gradient $\frac{dh}{d\ell}$ est alors d'autant plus grande que la pente est importante.

3. Extremum avec contrainte

• La recherche de l'extremum d'une fonction f(x, y, z) peut se faire à l'aide de la condition $\vec{\nabla}f = \vec{0}$.

On cherche maintenant comment procéder pour trouver un extremum vérifiant deux contraintes décrites par deux équations $g(x, y, z) = 0$ et $h(x, y, z) = 0$; cela correspond à un extremum le long d'une courbe dans l'espace.

• Une première méthode consisterait à considérer que le nombre de variables indépendantes est diminué de deux, par exemple si on sait résoudre explicitement $g = 0$ et $h = 0$ sous la forme : $y = y(x)$ et $z = z(x)$.

Au lieu de chercher l'extremum de f(x, y, z) par l'annulation de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, on devrait alors considérer l'extremum de $f(x) = f(x, y(x), z(x))$ par l'annulation de $\frac{df(x)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\ \frac{dy(x)}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\ \frac{dz(x)}{dx}$. Cette démarche est toutefois rarement possible (résolution explicite nécessaire).

• Mais l'extremum cherché correspond à $\vec{\nabla}f$ perpendiculaire à la courbe d'équations $g = 0$ et $h = 0$. Or $\vec{\nabla}g$ et $\vec{\nabla}h$ sont respectivement perpendiculaires aux surfaces décrites par ces équations, donc $\vec{\nabla}f$ est (à l'extremum) parallèle au plan normal dont la direction est selon la base $(\vec{\nabla}g\ ; \vec{\nabla}h)$.

Ceci peut s'écrire sous la forme : $\vec{\nabla}f + \lambda\ \vec{\nabla}g + \mu\ \vec{\nabla}h = \vec{\nabla}(f + \lambda\, g + \mu\, h) = 0$ où les constantes λ et μ sont nommées “multiplicateurs de Lagrange”.

Pour trouver l'extremum, il suffit donc d'étudier l'annulation de $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, avec $F = f + \lambda\, g + \mu\, h$; ce système d'équations donne alors en outre les valeurs des coefficients λ et μ.