GRADIENT - corrigé des exercices

I. Dépendance “radiale”

1.a. • La fonction ne dépendant que de r, le gradient se limite à une dérivée radiale ; la relation indiquée dans l'énoncé correspond donc simplement à la propriété d'une dérivée composée.

1.b. • En coordonnées polaires $\vec{\nabla} r = \left[\frac{\partial r}{\partial r}\right]_{\theta} \vec{u_r} + \frac{1}{r}.\left[\frac{\partial r}{\partial \theta}\right]_{r} \vec{u_\theta} = \vec{u_r}$.

◊ remarque : on retrouve que $\vec{\nabla} f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \vec{u_r}$.

2.a. • En coordonnées polaires on obtient : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

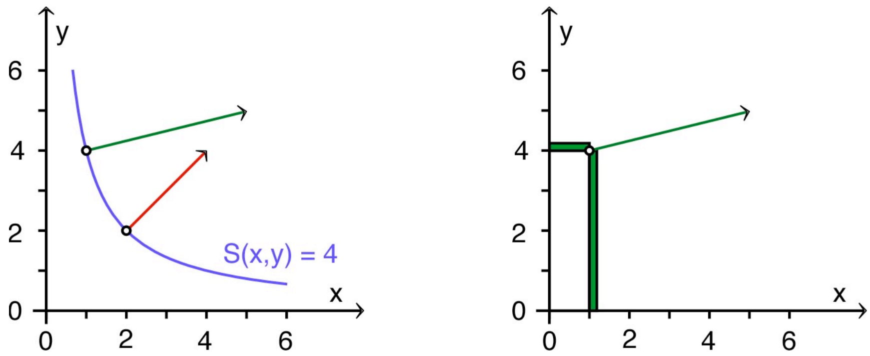
2.b. • En coordonnées cartésiennes : $\vec{\nabla} r = \left[\frac{\partial r}{\partial x}\right]_{y} \vec{u_x} + \left[\frac{\partial r}{\partial y}\right]_{x} \vec{u_y} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{u_x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{u_y}$.

• Mais $x\vec{u_x} + y\vec{u_y} = \overrightarrow{OM} = r\,\vec{u_r}$ donc $\vec{\nabla} r = \frac{r\vec{u_r}}{r} = \vec{u_r}$.

II. Comparaison du gradient pour différents systèmes de coordonnées

1.a. • En coordonnées cartésiennes : $\vec{\nabla} S(x, y) = \left[\frac{\partial S}{\partial x}\right]_{y} \vec{u_x} + \left[\frac{\partial S}{\partial y}\right]_{x} \vec{u_y} = y\,\vec{u_x} + x\,\vec{u_y}$.

1.b. • Pour les cas particuliers envisagés : $\vec{\nabla} S(2 ; 2) = 2\,\vec{u_x} + 2\,\vec{u_y}$; $\vec{\nabla} S(1 ; 4) = 4\,\vec{u_x} + \vec{u_y}$.



1.c. • La courbe d'équation $S = xy = 4$ correspond à une hyperbole $(y = \frac{S}{x} = \frac{4}{x})$.

1.d. • On constate effectivement la propriété indiquée en ce qui concerne la direction du gradient.

◊ remarque : on peut préciser, d'après le graphique, qu'une augmentation dy fait d'autant moins varier S que x est petit (et de même une augmentation dx fait d'autant plus varier S que y est grand).

◊ remarque : en traçant plusieurs courbes “iso-surfaciques”, on peut aussi préciser que la “mesure algébrique” du gradient est d'autant plus grande que ces courbes sont plus rapprochées entre elles.

2.a. • En coordonnées polaires on obtient : $x = r\cos(\theta)$; $y = r\sin(\theta)$; $S = \frac{1}{2}r^2 \sin(2\theta)$.

2.b. • En coordonnées polaires : $\vec{\nabla}S(r,\theta) = \left[\frac{\partial S}{\partial r}\right]_\theta \vec{u_r} + \frac{1}{r}.\left[\frac{\partial S}{\partial \theta}\right]_r \vec{u_\theta} = r\sin(2\theta)\ \vec{u_r} + r\cos(2\theta)\ \vec{u_\theta}$.

2.c. • On obtient en coordonnées polaires : $\vec{\nabla}S\left(2.\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{4}\right) = 2.\sqrt{2}\ \vec{u_r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\ \vec{u_x} + 2\ \vec{u_y}$.

III. Comparaison du gradient pour différents systèmes de coordonnées

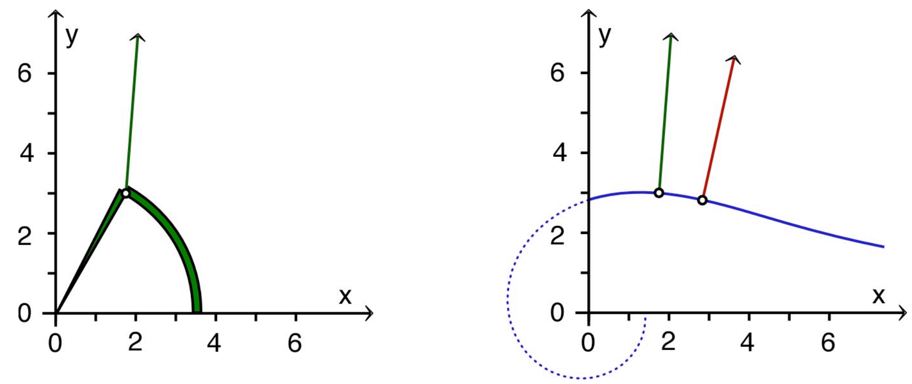
1.a. • La surface du secteur angulaires est : $S = \pi r^2\ \frac{\theta}{2\pi} = \frac{r^2\theta}{2}$.

1.b. • On en déduit : $\vec{\nabla}S = r\theta\ \vec{u_r} + \frac{r}{2}\ \vec{u_\theta}$.

1.c. • On obtient : $\vec{\nabla}S\left(2.\sqrt{3};\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ \vec{u_r}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\ \vec{u_\theta}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

◊ remarque : en coordonnées cartésiennes, ceci s'écrit : $\vec{\nabla}S\left(3;\sqrt{3}\right) = \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\right)\ \vec{u_x} + \left(\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \vec{u_y}$.

• On obtient : $\vec{\nabla}S\left(4;\frac{\pi}{4}\right) = \pi\ \vec{u_r}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\ \vec{u_\theta}\left(\frac{\pi}{4}\right)$.



1.d. • La courbe d'équation $S = \frac{r^2\theta}{2} = 2\pi$ correspond à une spirale $\left(r = \sqrt{\frac{2S}{\theta}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\theta}}\right)$ représentée ci-dessus.

1.e. • On peut vérifier graphiquement ci-dessus, pour les deux cas envisagés précédemment, que le gradient est orthogonal à la courbe iso-surfacique.

2. • À suivre...

IV. Coordonnées polaires

1. • La projection de l'expression cartésienne sur la base orthonormée $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ peut s'écrire :

$$\vec{\nabla}U = \left(\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_y \vec{u_x} + \left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_x \vec{u_y}\right)\cdot\vec{u_r}\ \ \vec{u_r} + \left(\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_y \vec{u_x} + \left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_x \vec{u_y}\right)\cdot\vec{u_\theta}\ \ \vec{u_\theta}\ ;$$

$$\vec{\nabla}U = \left(\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_y \cos(\theta) + \left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_x \sin(\theta)\right)\ \vec{u_r} + \left(-\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_y \sin(\theta) + \left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_x \cos(\theta)\right)\ \vec{u_\theta}.$$

2. • En considérant : $\left[\frac{\partial U}{\partial r}\right]_\theta = \left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_y \left[\frac{\partial x}{\partial r}\right]_\theta + \left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_x \left[\frac{\partial y}{\partial r}\right]_\theta$ avec $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, on obtient : $\left[\frac{\partial U}{\partial r}\right]_\theta = \left(\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_y \cos(\theta) + \left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_x \sin(\theta)\right)$.

• De même : $\left[\frac{\partial U}{\partial \theta}\right]_r = \left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_y \left[\frac{\partial x}{\partial \theta}\right]_r + \left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_x \left[\frac{\partial y}{\partial \theta}\right]_r = r\,.\left(-\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_y \sin(\theta) + \left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_x \cos(\theta)\right)$.

• Finalement : $\vec{\nabla} U = \left[\frac{\partial U}{\partial r}\right]_\theta \vec{u_r} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial U}{\partial \theta}\right]_r \vec{u_\theta}$.

V. Dérivée dans la direction d'un vecteur

• Pour des coordonnées polaires dans le plan, la longueur de l'arc de cercle associé à un déplacement angulaire $d\theta$ (pour r fixé) est $ds = r\,d\theta$; ainsi : $\frac{\partial V}{\partial s} = \left[\frac{dV}{r\,d\theta}\right]_r = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]_r$.

• Puisque $\frac{\partial V}{\partial s} = \left(\vec{u_\theta} \cdot \vec{\nabla}\right)(V) = (\vec{\nabla} V) \cdot \vec{u_\theta}$, cela montre inversement que la coordonnée orthoradiale du gradient est $\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$.

VI. Comparaison du gradient pour différents systèmes de coordonnées

1. • On peut considérer : $y(x) = 2 - 3x$; $S(x) = S(x, y(x)) = x.(2 - 3x)$.

• Le maximum correspond à : $\frac{dS(x)}{dx} = 2 - 6x = 0$ donc $x = \frac{1}{3}$ et $y(x) = 1$; ainsi $S(x, y) = \frac{1}{3}$.

◊ remarque : il est ici aisé de vérifier que l'extremum est un maximum à l'aide du signe de $\frac{d^2S(x)}{dx^2} < 0$.

2. • On peut considérer : $g(x, y) = 3x + y - 2$; $\Sigma(x, y) = S + \lambda\, g = xy + \lambda.(3x + y - 2)$.

• Le maximum correspond à : $\frac{\partial \Sigma(x,y)}{\partial x} = y + 3\lambda = 0$ et $\frac{\partial \Sigma(x,y)}{\partial y} = x + \lambda = 0$.

• Puisqu'on impose $g(x, y) = 3x + y - 2 = 0$, on obtient donc : $x = -\lambda$; $y = -3\lambda$; $-6\lambda - 2 = 0$.

• Ainsi : $\lambda = -\frac{1}{3}$; $x = \frac{1}{3}$; $y = 1$; $S(x, y) = \frac{1}{3}$.

◊ remarque : il n'est ici pas évident que l'extremum trouvé est un maximum.