GRADIENT - exercices

I. Dépendance “radiale”

1. ◊ remarque : on se limite ici, pour simplifier, à une étude dans le plan en coordonnées polaires.

• Un grand nombre de grandeurs physiques dépendent uniquement de la distance r par rapport à un point fixe du système étudié, généralement pris comme origine. Par exemple le potentiel électrique créé par une charge électrique ponctuelle q peut s'écrire : $V = V(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (où la constante ε_0 est appelée “permittivité diélectrique”).

a) Justifier que pour de telles grandeurs, on peut utiliser la relation : $\vec{\nabla}f(r) = \dfrac{\partial f(r)}{\partial r}.\vec{\nabla}r$.

◊ remarque : ici $\vec{\nabla}r$ désigne le gradient de la fonction (de r et θ) dont l'expression est simplement “r”.

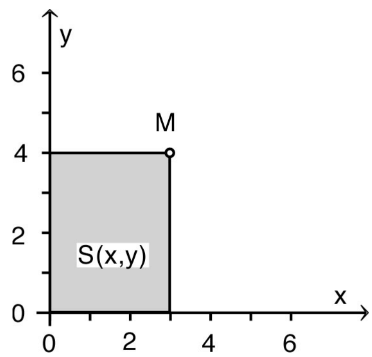
b) En raisonnant avec les coordonnées polaires, montrer que : $\vec{\nabla}r = \vec{u_r}$.

2. a) Exprimer $r = r(x, y)$ en coordonnées cartésiennes.

b) En raisonnant avec les coordonnées cartésiennes, montrer que : $\vec{\nabla}r(x,y) = \vec{u_r}$.

II. Comparaison du gradient pour différents systèmes de coordonnées

• Soit un point M {x, y} dans un plan, on se propose d'étudier la surface délimitée par les axes et les perpendiculaires abaissées du point M : $S = S(x, y) = x\,y$.



1. a) Déterminer l'expression de $\vec{\nabla}S(x, y)$.

b) Représenter graphiquement $\vec{\nabla}S(2 ; 2)$ et $\vec{\nabla}S(1 ; 4)$.

c) Représenter la courbe correspondant au lieu des points donnant la surface constante : $S = 4$.

d) Vérifier que le gradient représenté précédemment est orthogonal à la courbe “iso-surfacique”.

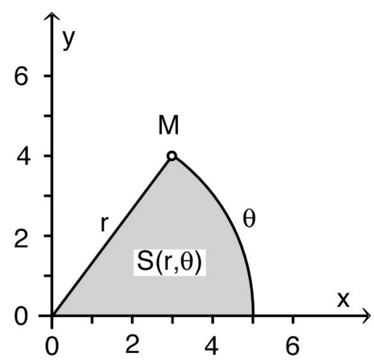
2. a) Exprimer $x(r, \theta)$, $y(r, \theta)$ et $S(r, \theta)$ en coordonnées polaires.

b) Déterminer l'expression de $\vec{\nabla}S(r, \theta)$.

c) Représenter graphiquement $\vec{\nabla}S\left(2.\sqrt{2}\,;\dfrac{\pi}{4}\right)$ en coordonnées polaires et vérifier qu'on retrouve le même résultat que pour $\vec{\nabla}S(2 ; 2)$ en coordonnées cartésiennes.

III. Comparaison du gradient pour différents systèmes de coordonnées

• Soit un point M {r, θ} dans un plan, en coordonnées polaires, on se propose d'étudier la surface délimitée par l'axe (Ox), la droite OM et l'arc d'angle θ sur le cercle ce centre O et passant par M.



1. a) Déterminer l'expression de $S(r, \theta)$.

b) Déterminer l'expression de $\vec{\nabla}S(r, \theta)$.

c) Représenter graphiquement $\vec{\nabla}S\left(2.\sqrt{3}\,;\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\vec{\nabla}S\left(4\,;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

d) Représenter la courbe correspondant au lieu des points donnant la surface constante : $S = 2\pi$.

e) Vérifier que le gradient représenté précédemment est orthogonal à la courbe “iso-surfacique”.

2. a) Exprimer r(x, y), θ(x, y) et S(x, y) en coordonnées cartésiennes.
b) Déterminer l'expression de $\vec{\nabla}S(x, y)$.
c) Représenter graphiquement $\vec{\nabla}S\left(2.\sqrt{2}\,;2.\sqrt{2}\right)$ en coordonnées cartésiennes et vérifier qu'on retrouve le même résultat que pour $\vec{\nabla}S\left(4\,;\frac{\pi}{4}\right)$ en coordonnées polaires.

IV. Coordonnées polaires

1. • Pour retrouver l'expression du gradient d'une fonction U(r, θ) en coordonnées polaires, on se propose de passer par l'intermédiaire des coordonnées cartésiennes x et y (en se limitant au plan).

• Calculer les coordonnées radiale et orthoradiales de $\vec{\nabla}U$ par simple projection de l'expression cartésienne sur la base orthonormée $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$.

2. • L'inconvénient de l'expression précédente est qu'elle est formulée en fonction des dérivées partielles par rapport à x et y. En considérant U(x(r, θ) , y(r, θ)), retrouver l'expression “usuelle” en coordonnées polaires.

V. Dérivée dans la direction d'un vecteur

• Pour décrire le position d'un point M sur une courbe, on peut définir une coordonnée “curviligne” s : longueur (algébrique) parcourue sur la courbe à partir d'une position choisie comme origine. On peut compléter ce repérage en définissant un vecteur unitaire $\vec{u_s}$ orienté selon la tangente à la courbe (dans le sens de s croissant).

◊ remarque : un repérage complet de M dans l'espace nécessite deux autres coordonnées, mais ceci est équivalent à une description de la courbe parcourue (il faut pour cela deux équations).

• Pour une fonction V(M), définie dans tout l'espace, mais dont on étudie ici les variations en fonction de la position de M sur la courbe, on peut alors utiliser une “dérivée dans la direction de la courbe”, déduite à partir du gradient : $\frac{\partial V}{\partial s} = (\vec{\nabla}V)\cdot\vec{u_s}$; on note souvent : $\frac{\partial V}{\partial s} = \left(\vec{u_s}\cdot\vec{\nabla}\right)(V)$.

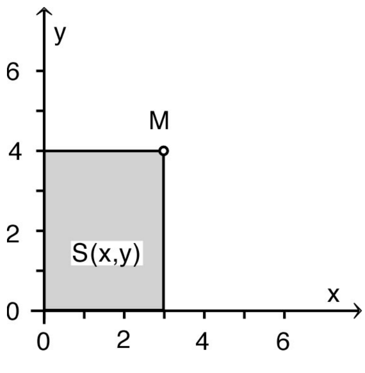
◊ remarque : il s'agit d'une dérivée partielle dans la mesure où le point reste sur la courbe ; les deux autres coordonnées décrites par les deux équations de la courbe sont supposées constantes.

• En particulier, pour des coordonnées polaires dans le plan, la longueur de l'arc de cercle associé à un déplacement angulaire dθ (pour r fixé) est ds = r dθ. Montrer que cela peut être utilisé inversement pour définir la composante orthoradiale du gradient dans ce système de repérage.

VI. Multiplicateurs de Lagrange

• Soit un point M {x, y} dans un plan, on se propose d'étudier la surface délimitée par les axes et les perpendiculaires abaissées du point M : S = S(x, y) = x y.

• On impose en outre que le point M soit sur la courbe d'équation 3 x + y = 2.



1. • Déterminer, par résolution explicite, la position de M telle que la surface soit maximale.

2. • Résoudre le même problème par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.