INCERTITUDES DE MESURE - corrigé des exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. "Propagation" des incertitudes

• L'influence de D est : $\frac{\partial n}{\partial D} = \frac{\cos\left(\frac{D+A}{2}\right)}{2\,\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \approx 0{,}64$.

• L'influence de A est : $\frac{\partial n}{\partial A} = \frac{\cos\left(\frac{D+A}{2}\right)}{2\,\sin\left(\frac{A}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{D+A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{2\,\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)} \approx -0{,}68$.

• Au total, avec la relation "pessimiste" : $\Delta n = \left|\frac{\partial n}{\partial D}\right|\,\Delta D + \left|\frac{\partial n}{\partial A}\right|\,\Delta A \approx 3{,}8.10^{-4}$.

• Les mesures des angles A et D peuvent être corrélées, par exemple si elles sont obtenues avec un même goniomètre comportant une part d'incertitude systématique. On peut malgré cela souhaiter estimer l'incertitude statistique en ignorant les corrélations :

$$\Delta n = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial D}\,\Delta D\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial A}\,\Delta A\right)^2} \approx 2{,}7.10^{-4} .$$

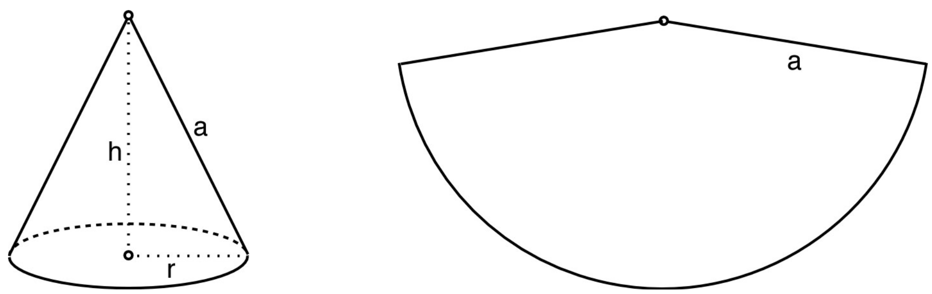
◊ remarque : dans de nombreuses circonstances, la différence entre ces deux modes d'évaluation n'a que peu de conséquences sur l'interprétation des phénomènes physiques.

• On en déduit l'indice et sa précision "probable" : $n = \frac{\sin\left(\frac{D+A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \approx 1{,}5321 \pm 0{,}0003$.

◊ remarque : n et Δn sont sans unité... il ne suffit pas d'utiliser D et ΔD, A et ΔA avec la même unité : l'utilisation des fonctions trigonométriques impose en principe l'usage des radians (équivalents à une grandeur sans unité)... ou bien il faut appliquer un coefficient correcteur dans le calcul des dérivées.

II. "Propagation" des incertitudes

1. • En coupant la surface latérale d'un cône le long d'une droite passant par le sommet, on peut la déplier "à plat" et obtenir ainsi une portion de disque.



• Soit $a = \sqrt{r^2 + h^2}$ la longueur du côté du cône, le périmètre de la base est $2\pi\,r$ et l'aire de la surface latérale est une proportion $\frac{2\pi\,r}{2\pi\,a}$ de l'aire $\pi\,a^2$ du disque de rayon a.

• L'aire latérale d'un cône droit est donc : $A = \pi\,a\,r = \pi\,r\,\sqrt{r^2 + h^2}$.

◊ remarque : l'aire élémentaire délimitée par le sommet et par un élément $d\ell = r\,d\theta$ du bord de la base est : $dS = \frac{1}{2}\,a\,d\ell$; ainsi $A = \int \frac{a\,r}{2}\,d\theta = \pi\,a\,r = \pi\,r\,\sqrt{r^2 + h^2}$.

2. • On a mesuré : $r = 30{,}0 \pm 0{,}2$ mm et $h = 50{,}0 \pm 0{,}2$ mm.

• Les influences de r et h sont : $\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\pi.(2\,r^2+h^2)}{\sqrt{r^2+h^2}} \approx 232\,mm$; $\frac{\partial A}{\partial h} = \frac{\pi\,r\,h}{\sqrt{r^2+h^2}} \approx 81\,mm$.

• Au total, avec la relation "pessimiste" : $\Delta A = \left|\frac{\partial A}{\partial r}\right|\,\Delta r + \left|\frac{\partial A}{\partial h}\right|\,\Delta h \approx 62\ \mathrm{mm}^2$.

• Les mesures des longueurs r et h peuvent être corrélées, par exemple si elles sont obtenues avec une même règle comportant une part d'incertitude systématique. On peut malgré cela souhaiter estimer l'incertitude statistique en ignorant les corrélations :

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial r}\,\Delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial h}\,\Delta h\right)^2} \approx 49\ \mathrm{mm}^2 .$$

◊ remarque : dans de nombreuses circonstances, la différence entre ces deux modes d'évaluation n'a que peu de conséquences sur l'interprétation des phénomènes physiques.

• Finalement on peut proposer : $A = \pi\, r\, \sqrt{r^2 + h^2} = 5496 \pm 50\ \mathrm{mm}^2$.

III. “Propagation” des incertitudes

• Les influences de x et y sont : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2\,y}{(x+y)^2} \approx 2{,}2.\,10^{-3}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2\,x}{(x+y)^2} \approx -4{,}4.\,10^{-3}$.

• Au total, avec la relation “pessimiste” : $\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y \approx 11.\,10^{-3}$.

• Les mesures des quantités x et y peuvent être corrélées, par exemple si elles sont obtenues avec un même instrument comportant une part d'incertitude systématique. On peut malgré cela souhaiter estimer l'incertitude statistique en ignorant les corrélations :

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y\right)^2} \approx 8.\,10^{-3} .$$

◊ remarque : dans de nombreuses circonstances, la différence entre ces deux modes d'évaluation n'a que peu de conséquences sur l'interprétation des phénomènes physiques.

• On en déduit le résultat et sa précision “probable” : $f = \frac{x-y}{x+y} = 0{,}333 \pm 0{,}008$.

B. EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

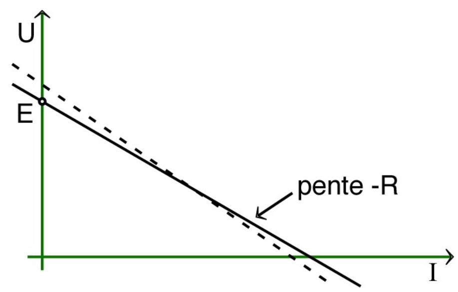
IV. “Corrélation” des incertitudes

1. • Le courant de court-circuit est : $I_c = \frac{E}{R} = 68{,}6\ \mathrm{mA}$.

• L'estimation rudimentaire de l'incertitude est : $\Delta I_c \approx \frac{1}{R}\,\Delta E + \frac{E}{R^2}\,\Delta R = 3{,}2\ \mathrm{mA}$.

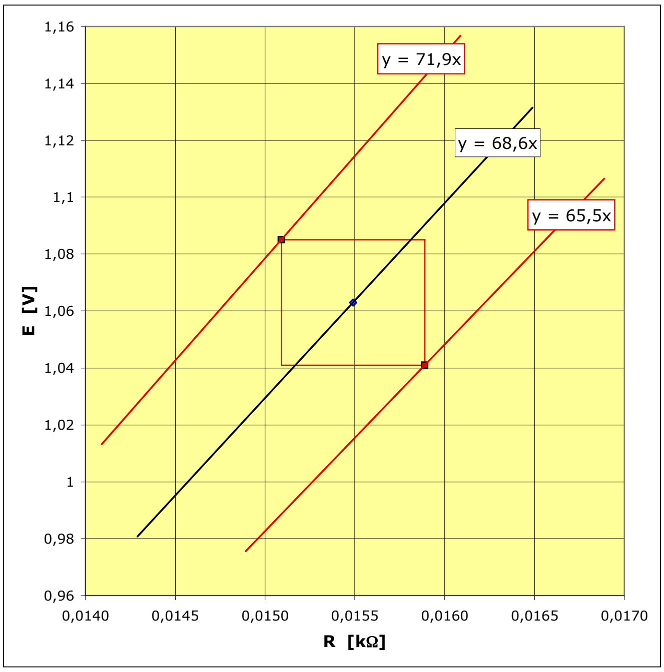
• Si on suppose que les incertitudes sont de nature uniquement aléatoire, on peut proposer aussi l'estimation : $\Delta I_c \approx \sqrt{\left(\frac{1}{R}\,\Delta E\right)^2 + \left(\frac{E}{R^2}\,\Delta R\right)^2} = 2{,}3\ \mathrm{mA}$.

2.a. • Si on impose une valeur de E plus grande, la droite la mieux ajustée bascule pour passer au mieux par le barycentre (pondéré) des points mesurés ; cela correspond à une augmentation de R (valeur absolue de la pente).

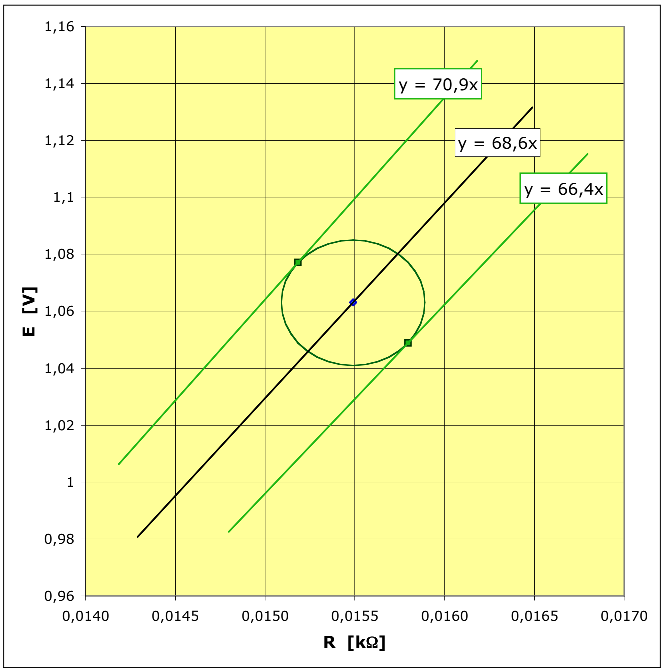


2.b. • Dans un plan de coordonnées R et E, les courbes d'égales valeur de I_c sont des droites passant par l'origine et de pente I_c : $E = I_c\, R$.

2.c. • Pour le mode de calcul (sans corrélation) $\Delta I_c \approx \frac{1}{R}\,\Delta E + \frac{E}{R^2}\,\Delta R$, la zone d'incertitude correspond au rectangle de largeur ΔR et de hauteur ΔE. L'intervalle de valeurs $\pm\,\Delta I_c \approx \pm\,3{,}2\ \mathrm{mA}$ peut être retrouvé en traçant les droites limites.



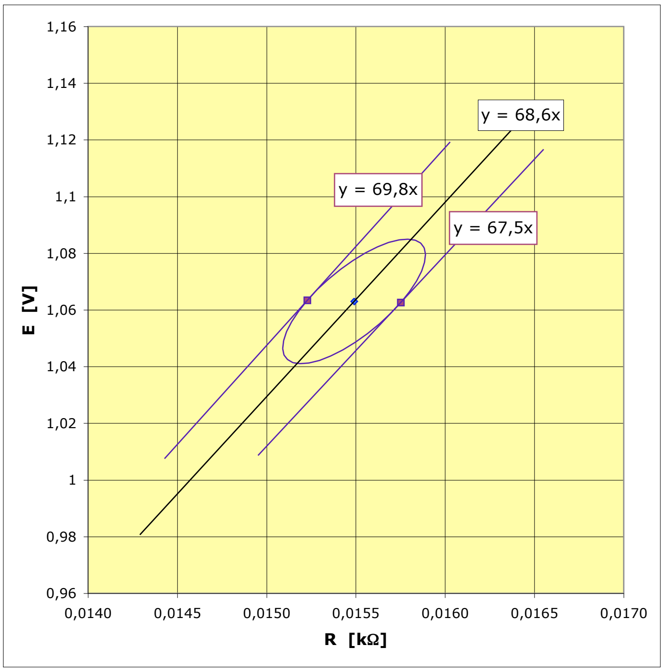
• Pour le mode de calcul (sans corrélation) $\Delta I_c \approx \sqrt{\left(\frac{1}{R}\ \Delta E\right)^2 + \left(\frac{E}{R^2}\ \Delta R\right)^2}$, la zone d'incertitude correspond l'ellipse “droite” de largeur ΔR et de hauteur ΔE. On peut la tracer sous forme paramétrique en considérant $R = R_0 + \Delta R \cos(\theta)$ et $E = E_0 + \Delta E \sin(\theta)$. L'intervalle de valeurs $\pm \Delta I_c \approx \pm 2{,}3\ \text{mA}$ peut être retrouvé en traçant les droites limites.



2.d. • Pour le mode de calcul avec corrélation $\Delta I_c \approx \sqrt{\left(\frac{1}{R}\ \Delta E\right)^2 + \left(\frac{E}{R^2}\ \Delta R\right)^2 - 2\ \frac{E}{R^3}\ c(E, R)} = 1{,}2\ \text{mA}$.

2.e. • La zone d'incertitude correspond l'ellipse “oblique” ; on peut la tracer sous forme paramétrique à l'aide d'un changement de notations.

• Dans le cas précédent, on pouvait écrire l'équation de l'ellipse sous la forme $x^2 + y^2 = 1$ en considérant $x = \frac{R-R_0}{\Delta R} = \cos(\theta)$ et $y = \frac{E-E_0}{\Delta E} = \sin(\theta)$.



• Dans le cas étudié ici, l'équation est de la forme $x^2 + y^2 + 2\,\alpha\,x\,y = 1 - \alpha^2$ avec $\alpha = -\frac{c(E,R)}{\Delta E\;\Delta R}$. On peut alors utiliser $x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}\,\sqrt{1+\alpha}} = \cos(\theta)$ et $y' = \frac{x-y}{\sqrt{2}\,\sqrt{1-\alpha}} = \sin(\theta)$ donnant $x'^{\,2} + y'^{\,2} = 1$.

◊ remarque : le choix du changement de variables le plus efficace peut se déduire de la diagonalisation de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

• En posant par ailleurs : $\cos(\varphi) = \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}$ et $\sin(\varphi) = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$, ceci donne : $R = R_0 + \Delta R \sin(\theta + \varphi)$ et $E = E_0 + \Delta E \cos(\theta + \varphi)$. L'intervalle de valeurs $\pm\,\Delta I_c \approx \pm\,1{,}2\ \mathrm{mA}$ peut être retrouvé en traçant les droites limites.

◊ remarque : on retrouve une projection horizontale de l'ellipse correspondant à $\pm\,\Delta R$ et une projection verticale correspondant à $\pm\,\Delta E$.

3. • L'ajustement du logiciel spécialisé est cohérent : il aboutit au même résultat quelle que soit la paramétrisation choisie.

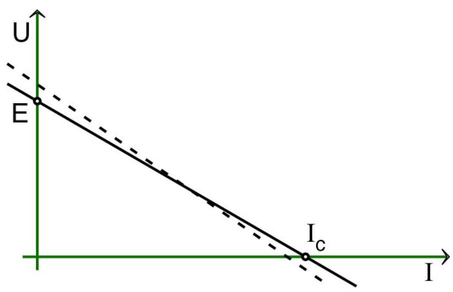
V. “Corrélation” des incertitudes

1. • La résistance est : $R = \frac{E}{I_c} = 15{,}31\ \Omega$.

• L'estimation rudimentaire de l'incertitude est : $\Delta R \approx \frac{1}{I_c}\,\Delta E + \frac{E}{{I_c}^2}\,\Delta I_c = 1{,}07\ \Omega$.

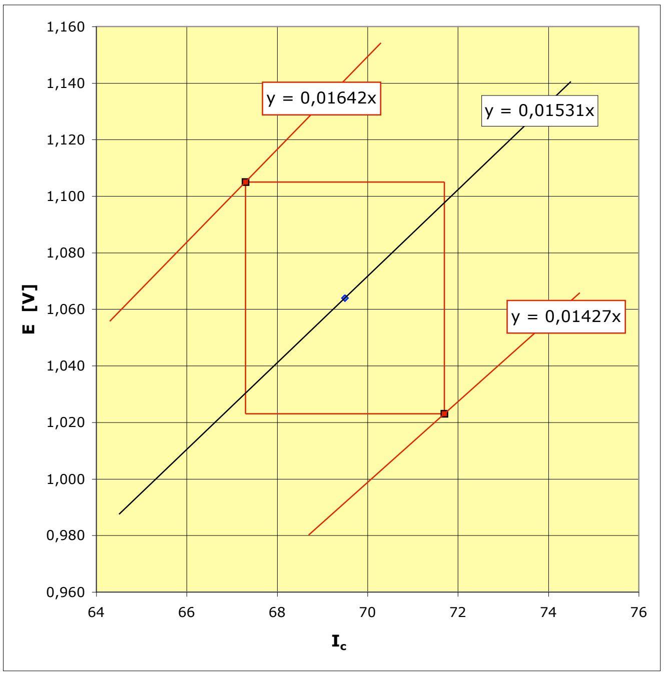
• Si on suppose que les incertitudes sont de nature uniquement aléatoire, on peut proposer aussi l'estimation : $\Delta R \approx \sqrt{\left(\frac{1}{I_c}\,\Delta E\right)^2 + \left(\frac{E}{{I_c}^2}\,\Delta I_c\right)^2} = 0{,}76\ \Omega$.

2.a. • Si on impose une valeur de E plus grande, la droite la mieux ajustée bascule pour passer au mieux par le barycentre (pondéré) des points mesurés ; cela correspond à une diminution de I_c (intersection avec l'axe des abscisse).

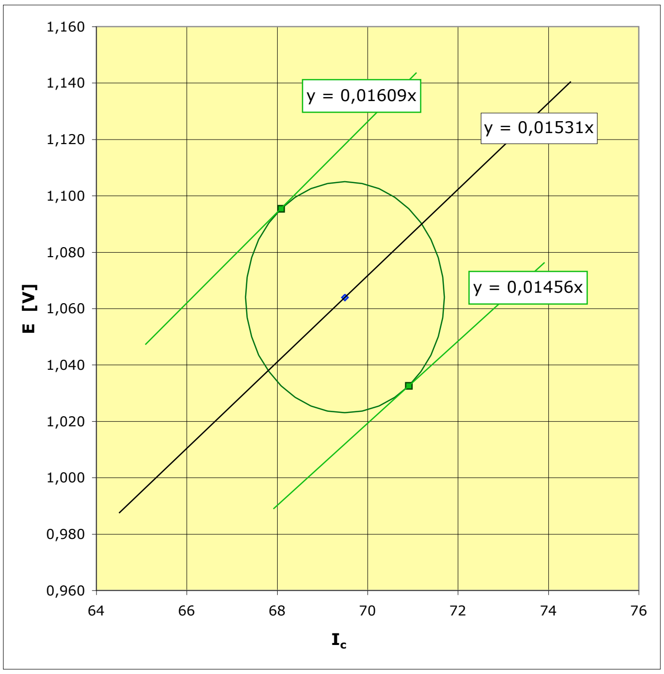


2.b. • Dans un plan de coordonnées I_c et E, les courbes d'égales valeur de R sont des droites passant par l'origine et de pente R : $E = I_c\, R$.

2.c. • Pour le mode de calcul (sans corrélation) $\Delta R \approx \frac{1}{I_c}\,\Delta E + \frac{E}{{I_c}^2}\,\Delta I_c$, la zone d'incertitude correspond au rectangle de largeur ΔI_c et de hauteur ΔE. L'intervalle de valeurs $\pm\Delta R \approx \pm 1{,}07\ \Omega$ peut être retrouvé en traçant les droites limites.



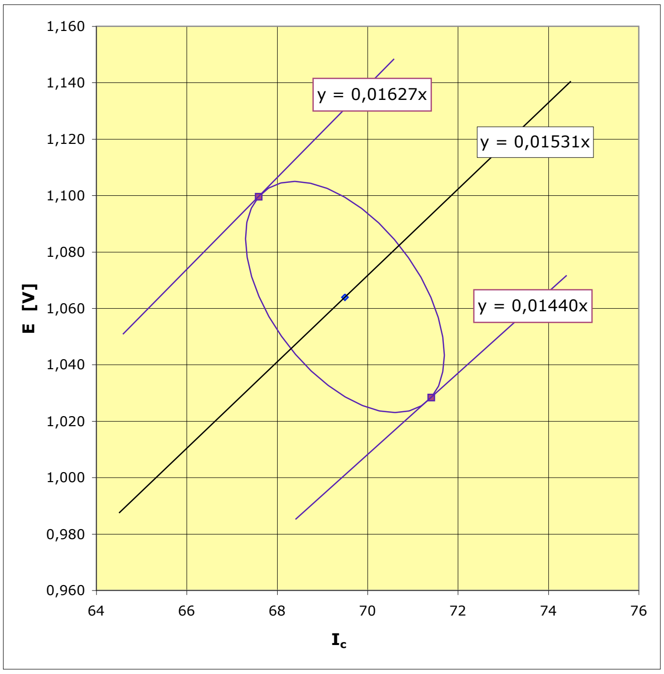
• Pour le mode de calcul (sans corrélation) $\Delta R \approx \sqrt{\left(\frac{1}{I_c}\,\Delta E\right)^2 + \left(\frac{E}{{I_c}^2}\,\Delta I_c\right)^2}$, la zone d'incertitude correspond l'ellipse “droite” de largeur ΔI_c et de hauteur ΔE. On peut la tracer sous forme paramétrique en considérant $I_c = I_{c0} + \Delta I_c\,\cos(\theta)$ et $E = E_0 + \Delta E\,\sin(\theta)$. L'intervalle de valeurs $\pm\Delta R \approx \pm 0{,}76\ \Omega$ peut être retrouvé en traçant les droites limites.



2.d. • Pour le mode de calcul avec corrélation $\Delta R \approx \sqrt{\left(\frac{1}{I_c}\,\Delta E\right)^2 + \left(\frac{E}{I_c{}^2}\,\Delta I_c\right)^2 - 2\,\frac{E}{I_c{}^3}\,c(E,I_c)} = 0{,}93\ \Omega$.

2.e. • La zone d'incertitude correspond l'ellipse “oblique” ; on peut la tracer sous forme paramétrique à l'aide d'un changement de notations.

• Dans le cas précédent, on pouvait écrire l'équation de l'ellipse sous la forme $x^2 + y^2 = 1$ en considérant $x = \frac{I_c - I_{c0}}{\Delta I_c} = \cos(\theta)$ et $y = \frac{E - E_0}{\Delta E} = \sin(\theta)$.



• Dans le cas étudié ici, l'équation est de la forme $x^2 + y^2 + 2\,\alpha\,x\,y = 1 - \alpha^2$ avec $\alpha = -\frac{c(E,I_c)}{\Delta E\ \Delta I_c}$.
On peut alors utiliser $x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}\,\sqrt{1+\alpha}} = \cos(\theta)$ et $y' = \frac{x-y}{\sqrt{2}\,\sqrt{1-\alpha}} = \sin(\theta)$ donnant $x'^{\,2} + y'^{\,2} = 1$.
◊ remarque : le choix du changement de variables le plus efficace peut se déduire de la diagonalisation de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

• En posant alors : $\cos(\varphi) = \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}$ et $\sin(\varphi) = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$, ceci donne : $I_c = I_{c0} + \Delta I_c \sin(\theta + \varphi)$ et $E = E_0 + \Delta E\cos(\theta + \varphi)$. L'intervalle de valeurs $\pm\,\Delta R \approx \pm\,0{,}93\ \Omega$ peut être retrouvé en traçant les droites limites.
◊ remarque : on retrouve une projection horizontale de l'ellipse correspondant à $\pm\,\Delta I_c$ et une projection verticale correspondant à $\pm\,\Delta E$.

3. • De façon générale, le résultat de l'expression quadratique est inférieur à celui de l'expression linéaire. Il est ainsi souvent considéré que la seconde est trop approximative et conduit à une surestimation systématique.
• En fait, lorsque la corrélation est positive, l'incertitude est encore plus petite que le résultat de l'expression quadratique ; ceci peut donner l'impression de confirmer le jugement précédent.
• Toutefois, au contraire, lorsque la corrélation est négative (cas étudié ici), l'incertitude est souvent plus proche du résultat de l'expression linéaire que de celui de l'expression quadratique.
• Si on ignore la corrélation et qu'on veut éviter de sous-estimer les incertitudes, il est alors parfois prudent d'utiliser l'expression linéaire.