A.M. VII - INTÉGRALES

1. Intégrales simples

1.1. Changements de variable

• L'intégrale : $I = \int_0^{\pi} \cos^2(\theta)\ \sin(\theta)\, d\theta$ peut se calculer de diverses manières. Le changement de variable peut simplifier la recherche d'une primitive.

• On peut utiliser par exemple la variable : $x = \cos(\theta)$ avec $x \in [1; -1]$ (en conservant l'ordre des limites pour le signe de l'intégrale).

Il faut alors considérer : $\frac{dx}{d\theta} = -\sin(\theta)$ et donc $dx = -\sin(\theta)\, d\theta$, ce qui donne :

$$I = -\int_1^{-1} x^2\, dx = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}.$$

> ☞ remarque : il faut changer trois quantités pour <u>tout</u> exprimer en fonction de la nouvelle variable : la variable (x), son intervalle de variation ($[x_{in}, x_{fin}]$), et sa "variation élémentaire" (dx).

1.2. Intégration par parties

• Pour $f = u(x).v(x)$, la dérivée : $\frac{df}{dx} = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$ donne par intégration :

$$\Delta f = \int \frac{df}{dx}\, dx = \int df = \int u \frac{dv}{dx}\, dx + \int v \frac{du}{dx}\, dx$$

◊ remarque : d'après $df = \frac{\partial f}{\partial u}\, du + \frac{\partial f}{\partial v}\, dv$ avec $f = uv$, $\frac{\partial f}{\partial u} = v$ et $\frac{\partial f}{\partial v} = u$, on peut aussi écrire (en changeant les variables) :

$$\Delta f = \int df = \int u\, dv + \int v\, du.$$

• Pour le calcul de : $J_n = \int_0^\infty r^n\, e^{-\alpha r}\, dr$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$) l'intégration par parties ramène par récurrence à $J_0 = \int_0^\infty e^{-\alpha r}\, dr = \frac{1}{\alpha}$.

Par exemple, avec : $u(r) = e^{-\alpha r}$ et $v(r) = \frac{r^{n+1}}{n+1}$ on obtient :

$$\frac{du(r)}{dr} = -\alpha\, e^{-\alpha r} \quad \text{et} \quad \frac{dv(r)}{dr} = r^n \ ;$$

$$\left[e^{-\alpha r}\,\frac{r^{n+1}}{n+1}\right]_0^\infty = 0 = J_n - \frac{\alpha}{n+1}\, J_{n+1} \ ;$$

ceci donne : $J_{n+1} = \frac{n+1}{\alpha}\, J_n$ d'où on tire : $J_n = \frac{n!}{\alpha^n}\, J_0$.

1.3. Approfondissement : intégrales dépendant d'un paramètre

• Pourvu que les dérivées existent et soient intégrables, on peut dériver “sous l'intégrale” par rapport aux “paramètres”.

Par exemple, le calcul de : $J_n(\alpha) = \int_0^\infty r^n\, e^{-\alpha r}\, dr$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$) peut se ramener au calcul de $J_0(\alpha)$ en dérivant par rapport au paramètre α :

$$\frac{dJ_n(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^\infty \frac{\partial\left(r^n\, e^{-\alpha r}\right)}{\partial\alpha}\, dr = \int_0^\infty r^n\left(-r\, e^{-\alpha r}\right) dr = -J_{n+1}(\alpha) \ ;$$

ceci donne : $J_{n+1}(\alpha) = -\frac{dJ_n(\alpha)}{d\alpha}$ d'où on tire : $J_n(\alpha) = (-1)^n\, \frac{d^n J_0(\alpha)}{d\alpha^n}$.

◊ remarque : ceci se généralise aux cas où les bornes d'intégration aussi dépendent du paramètre (ici, les bornes 0 et ∞ ne dépendent pas de α) ; mais la dérivation se complique alors à cause des dérivées des bornes.

2. Intégrales multiples

2.1. Intégrabilité

• Pour une fonction $f(x, y) > 0$, si l'intégrale double $\int\left(\int f\,dx\right)dy$ existe, alors $\int\left(\int f\,dy\right)dx$ existe aussi et lui est égale (on dit que f est intégrable sur le domaine considéré).

Si f n'est pas partout positive mais que |f| est intégrable, alors f est intégrable (on dit dans ce cas "absolument intégrable").

Par contre, pour f(x, y) quelconque, il est possible que les intégrales n'existent pas, ou bien qu'elles existent mais soient différentes.

• Ainsi, pour calculer la position du centre d'inertie G d'un triangle rectangle délimité par les deux axes Ox et Oy et par la droite d'équation $y = 2 - 3x$:

$$M\ \overrightarrow{OG} = \iint_S \mu.\left(x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y}\right)dS \quad \text{avec :} \quad M = \iint_S \mu\,dS \quad \text{et} \quad dS = dx\,dy.$$

Alors :
$$M\ \overrightarrow{OG} = \mu \int_0^{2/3}\left(\int_0^{2-3x}\left(x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y}\right)dy\right)dx \ ;$$
$$M = \mu \int_0^{2/3}\left(\int_0^{2-3x} dy\right)dx \ ;$$

puis :
$$M\ \overrightarrow{OG} = \mu \int_0^{2/3}\left(x.(2-3x)\overrightarrow{u_x} + \frac{(2-3x)^2}{2}\overrightarrow{u_y}\right)dx \ ;$$
$$M = \mu \int_0^{2/3}(2-3x)\,dx \ ;$$

et donc :
$$M\ \overrightarrow{OG} = \frac{4\mu}{27}\ (\overrightarrow{u_x} + 3\ \overrightarrow{u_y}) \quad \text{avec :} \quad M = \frac{2}{3}\mu = \mu S.$$

On trouve ainsi que les coordonnées de G sont : $x_G = \frac{2}{9}$ et $y_G = \frac{2}{3}$; c'est-à-dire (dans ce cas) le tiers de la base et le tiers de la hauteur, ce qui découle du fait que G est au tiers des médianes.

☞ remarque : si $f(x, y) = u(x).v(y)$ et si le domaine d'intégration est le produit de deux domaines $D = D_x \times D_y$ alors l'intégration est simplifiée (variables séparables) : $\iint_D f\, dx\, dy = \left(\int_{D_x} u\, dx\right) . \left(\int_{D_y} v\, dy\right)$.

2.2. Changements de variables

• Les changements de variables dans les intégrales multiples procèdent de façon analogue à ceux des intégrales simples :

◊ on transforme la fonction à intégrer ;
◊ on transforme les limites d'intégration ;
◊ on transforme l'élément d'intégration.

• Dans le plan, en coordonnées polaires, les variables $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0 ; 2\pi]$ correspondent à un "élément surfacique" : $dS = dr . r\, d\theta$.

On peut de même utiliser dans l'espace les "éléments volumiques" :

$d\tau = dr . r\, d\theta . dz$ en coordonnées cylindriques ;
$d\tau = dr . r\, d\theta . r \sin(\theta)\, d\phi$ en coordonnées sphériques.

🕮 *exercices n° I, II et III.*