# INTÉGRALES - corrigé des exercices

## I. Méthodes d'intégration

1. • En dérivant $K_n(\alpha)$ on obtient : $K_{n+2}(\alpha) = -\dfrac{dK_n(\alpha)}{d\alpha}$ (1)

• En intégrant par parties on obtient : $K_{n+2}(\alpha) = \dfrac{n+1}{2\alpha}\, K_n(\alpha)$ (2)

• Par comparaison : $\dfrac{1}{K_n(\alpha)}\, \dfrac{dK_n(\alpha)}{d\alpha} = -\dfrac{n+1}{2\alpha}$.

• L'intégration donne : $\ln[K_n(\alpha)] = -\dfrac{n+1}{2}\ln(\alpha)$ + cste (avec une constante d'intégration dépendant de n), c'est-à-dire : $K_n(\alpha) = \lambda_n\, \alpha^{-(n+1)/2}$.

2. • En reportant ce résultat dans (1) ou (2), on obtient : $\lambda_{n+2} = \dfrac{n+1}{2}\lambda_n$ et donc pour les valeurs impaires : $\lambda_n = \dfrac{n-1}{2}\lambda_{n-2}$ ; $\lambda_{n-2} = \dfrac{n-3}{2}\lambda_{n-4}$ ; ... ; d'où par récurrence : $\lambda_n = \left(\dfrac{n-1}{2}\right)!\ \lambda_1$.

• En utilisant $y = x^2$ : $K_1(\alpha) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha y}\, dy = \dfrac{1}{2\alpha}$ et par suite : $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$.

• Finalement, pour n impair : $K_n(\alpha) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n-1}{2}\right)!\ \alpha^{-(n+1)/2}$.

3. • En coordonnées polaires : $K_0(\alpha)^2 = \displaystyle\iint_{D'} e^{-\alpha r^2}\, r\, dr\, d\theta$ avec $D' = \mathbb{R}^+ \times [0; \frac{\pi}{2}]$.

• Ceci peut s'écrire : $K_0(\alpha)^2 = \left(\displaystyle\int_0^\infty r\, e^{-\alpha r^2} dr\right) . \left(\displaystyle\int_0^{\pi/2} d\theta\right) = \dfrac{\pi}{2} K_1(\alpha) = \dfrac{\pi}{4\alpha}$ ; ainsi : $K_0(\alpha) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}$ ce qui donne : $\lambda_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

• D'une façon analogue à la précédente, on obtient pour les valeurs paires : $\lambda_n = \dfrac{n-1}{2}\lambda_{n-2}$ ; ... ; d'où par récurrence : $\lambda_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}\, \dfrac{(n-1)!}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!}\, \lambda_0$.

• Finalement, pour n pair (si on simplifie (1)! pour n = 0) : $K_n(\alpha) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^n}\, \dfrac{(n-1)!}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!}\ \alpha^{-(n+1)/2}$.

## II. Intégrale multiple

1. • Pour un système de plusieurs masses ponctuelles $m_i$, de masse totale $M = \sum m_i$, la position du centre d'inertie G est définie par : $M\, \overrightarrow{OG} = \sum\left(m_i\, \overrightarrow{OP_i}\right)$ où $P_i$ désigne la position de la masse $m_i$.

• Ceci se généralise pour une répartition de masse surfacique uniforme : $M\, \overrightarrow{OG} = \iint \overrightarrow{OP}\, dm$ où la masse totale est $M = \iint dm$, et où P désigne la position de la masse infinitésimale $dm = \mu\, dx\, dy$.

2. • En prenant l'origine O au centre du disque dont on considère une moitié, et en choisissant la moitié définie par $x > 0$, la symétrie impose que G est sur l'axe de x et il suffit donc de calculer son abscisse.

• L'équation intégrale se ramène alors à : $M\, x_G = \mu \iint x\, dx\, dy$ mais les limites d'intégration sur x et y sont compliquées pour un demi disque.

• Le plus simple est alors d'utiliser les coordonnées polaires :

$$M\ x_G = \mu \iint r\cos(\theta)\, r\, dr\, d\theta = \mu \,.\left(\int_0^R r^2\, dr\right).\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta)\, d\theta\right)$$

$$\mu\ \frac{\pi R^2}{2}\ x_G = \mu.\ (\frac{R^3}{3}).(2) \quad \text{et donc :} \quad x_G = \frac{4R}{3\pi}.$$

◊ remarque : si on ne voit pas immédiatement la symétrie permettant de se ramener à une intégrale algébrique, on obtient vectoriellement : $M\ \overrightarrow{OG} = \mu\,.\left(\int_0^R r^2\, dr\right).\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overrightarrow{u_r}(\theta)\, d\theta\right)$ ; on peut alors utiliser la représentation complexe du vecteur unitaire $\overrightarrow{u_r}(\theta)$ par le nombre complexe $\underline{z} = e^{i\theta}$ ; ainsi l'intégrale représentée par $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\theta}\, d\theta = \left[\frac{e^{i\theta}}{i}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2$ donne : $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overrightarrow{u_r}(\theta)\, d\theta = 2\,\overrightarrow{u_x}$.

## III. Gradient en coordonnées sphériques

1. • De $\overrightarrow{OM} = r\ \overrightarrow{u_r}$ on déduit : $d\overrightarrow{OM} = dr\ \overrightarrow{u_r} + r\, d\theta\ \overrightarrow{u_\theta} + r\sin(\theta)\, d\phi\ \overrightarrow{u_\phi}$ où les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_\theta} = \frac{\partial \overrightarrow{u_r}}{\partial \theta}$ et $\overrightarrow{u_\phi} = \frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial \overrightarrow{u_r}}{\partial \phi}$ ont pour directions respectives les tangentes aux cercles décrits par l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{u_r}$ d'origine O lorsqu'on lui applique les rotations d'angles $d\theta$ et $d\phi$. Ces directions sont donc orthogonales à $\overrightarrow{u_r}$ et les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$, $\overrightarrow{u_\phi}$ ainsi définis correspondent effectivement aux vecteurs unitaires des coordonnées sphériques.

2. • La différentielle peut s'écrire : $df = \frac{\partial f}{\partial r}\, dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}\, d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi}\, d\phi$ ; mais par définition du gradient elle peut aussi s'écrire : $df = \vec{\nabla} f \cdot d\overrightarrow{OM} = [\vec{\nabla} f]_r\, dr + [\vec{\nabla} f]_\theta\, r\, d\theta + [\vec{\nabla} f]_\phi\, r\sin(\theta)\, d\phi$ ce qui impose :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\ \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial f}{\partial \theta}\ \overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\ \frac{\partial f}{\partial \phi}\ \overrightarrow{u_\phi}.$$