INTÉGRALES - exercices

I. Méthodes d'intégration

1. • Montrer que les quantités (avec $n \in \mathbb{N}$) : $K_n(\alpha) = \int_0^\infty x^n\, e^{-\alpha x^2} dx$ sont liées par les relations :

$$K_{n+2}(\alpha) = -\frac{dK_n(\alpha)}{d\alpha} \qquad (1)$$

$$K_{n+2}(\alpha) = \frac{n+1}{2\alpha}\, K_n(\alpha) \qquad (2)$$

• En déduire une équation différentielle vérifiée par $K_n(\alpha)$.

• Intégrer l'équation différentielle ; vérifier que le résultat dépend d'une constante d'intégration λ_n.

2. • En reportant ce résultat dans (1) ou (2), calculer λ_n en fonction de λ_1 pour les valeurs impaires de n.

• Calculer $K_1(\alpha) = \int_0^\infty x\, e^{-\alpha x^2} dx$ par intégration directe.

• En déduire $K_n(\alpha)$ pour les valeurs impaires de n.

3. • Pour calculer $K_0(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx$ on utilise le fait que le résultat de l'intégrale ne dépend pas du "nom" de la variable (c'est une variable "muette") : $K_0(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha y^2} dy$.

• On peut donc écrire : $K_0(\alpha)^2 = \left(\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx\right) \cdot \left(\int_0^\infty e^{-\alpha y^2} dy\right)$ et par conséquent :

$$K_0(\alpha)^2 = \iint_D e^{-\alpha x^2 - \alpha y^2} dx\, dy \quad \text{avec } D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

• Calculer cette intégrale en utilisant les coordonnées polaires dans le quart de plan.

• En déduire $K_0(\alpha)$, puis $K_n(\alpha)$ pour les valeurs paires de n.

II. Intégrale multiple

1. • Rappeler la relation définissant la position du centre d'inertie d'un système de plusieurs masses ponctuelles m_i.

• Généraliser cette relation pour une répartition de masse surfacique uniforme : $dm(x, y) = \mu\, dx\, dy$

2. • Calculer la position du centre d'inertie d'un demi disque.

III. Gradient en coordonnées sphériques

• Soit $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ un repère orthonormé, M un point de l'espace, et H sa projection sur le plan xOy. Le point M peut être repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), où $r = OM$ est le "rayon", où $\theta = \left(\widehat{\vec{u}_z ; \overrightarrow{OM}}\right)$ est la colatitude, et où $\phi = \left(\widehat{\vec{u}_x ; \overrightarrow{OH}}\right)$ est la longitude.

1. • Montrer qu'en faisant varier une à une les trois coordonnées de quantités infinitésimales, on définit trois déplacements orthogonaux ; on désignera par $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\phi$ les vecteur unitaires correspondants.

• Exprimer le déplacement infinitésimal quelconque $d\overrightarrow{OM}$ sur la base de ces vecteurs.

2. • Soit $f(r, \theta, \phi)$ une fonction scalaire définie en coordonnées sphériques. En identifiant : $df = \vec{\nabla} f \cdot d\overrightarrow{OM}$ exprimer les coordonnées de $\vec{\nabla} f$ sur la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$.