AM. IV - MÉTHODES D'APPROXIMATION

1. Développements limités

• Dans la limite des "petites" valeurs de x, les développements en série (limités à un ordre approprié) permettent de calculer des approximations.

Par exemple, le développement : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$ peut servir au calcul numérique rapide : $\frac{1}{0,97} \approx 1,03$.

◊ remarque : on peut poser $S_n = 1 + x + x^2 + ... + x^n$ puis simplifier $(1 - x)\, S_n$ et en déduire une expression de S_n dont la limite pour $n \to \infty$ est évidente.

• Dans des conditions de "convergence" qui correspondent assez souvent à : $|x| \ll 1$, on peut en déduire d'autres développements, par exemple :

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$ (changement de signe) ;

$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...$ (intégration, où la constante est nulle)

• D'autres développements peuvent être utiles :

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha.(\alpha - 1)\frac{x^2}{2!} + \alpha.(\alpha - 1).(\alpha - 2)\frac{x^3}{3!} + ...$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...$ ($\mathcal{Re}(e^{ix})$ d'après $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$)

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...$ ($\mathcal{Im}(e^{ix})$)

• D'une façon générale, pourvu que les dérivées existent :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\,\frac{x^2}{2!} + ... \qquad \text{(relation de Taylor/Mac-Laurin)}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + f''(x_0)\,\frac{\left(x - x_0\right)^2}{2!} + ...$$

2. Fonctions implicites

2.1. Conditions de définition

• Soit une équation $f(x, y) = 0$, on peut parfois "expliciter" $x(y)$ ou $y(x)$; ainsi pour : $y^2 - x = 0$, on peut écrire $x(y) = y^2$, ou (à la rigueur) $y(x) = \pm \sqrt{x}$.

Mais il existe des cas où la fonction $f(x, y)$ est telle qu'on ne sait pas résoudre simplement en explicitant l'une ou l'autre des variables ; on peut alors éventuellement résoudre de façon "implicite".

• Soit $f(x, y)$ une fonction "continûment dérivable" (dont les dérivées partielles existent et sont continues) ; s'il existe $\{x_0, y_0\}$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$, et pour lequel $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, alors la condition $f(x, y) = 0$ définit de façon implicite une fonction (au moins) $y = y(x)$, et cette fonction est continue.

◊ remarque : ceci signifie que **si** on sait qu'il existe $y_0 = y(x_0)$ alors on sait qu'il existe aussi (au moins) un $y(x)$ pour tout x voisin de x_0.

2.2. Calcul de fonctions implicites

2.2.1. Programmation de suites convergentes

• De nombreuses calculatrices sont capables de résoudre numériquement, à l'aide d'une touche de type "solve", les équations de la forme $f(x, y) = 0$ donnant $y = y(x)$ de façon implicite : une fois l'équation programmée dans la calculatrice, elle donne une valeur numérique de y pour chaque valeur numérique de x qu'on lui indique (si au moins une solution existe).

Pour les calculatrices qui ne disposent pas de touche “solve” mais qui sont programmables, il est très souvent possible de résoudre le problème par approximations successives en mettant (par exemple) l’équation sous une forme (non unique) : $y = g(x, y)$.

En partant d’une valeur approximative y_1, on calcule alors : $y_2 = g(x, y_1)$, puis de même ainsi de suite : $y_{n+1} = g(x, y_n)$...

Si cette suite est convergente, la limite est **une** des solutions (il peut y en avoir plusieurs) ; sinon, on peut obtenir une suite convergente en mettant l’équation $f(x, y) = 0$ sous une autre forme : $y = h(x, y)$ (il y a forcément au moins deux façons dans les cas où on ne peut pas expliciter).

◊ remarque : lorsqu'il y a plusieurs solutions, le choix de la valeur initiale estimée y_1 oriente le calcul vers celle qui s'en rapproche (option que n'ont pas forcément les calculatrices).

• Par exemple, pour : $f(x, y) = \ln(xy) + y^{3/2} - 1 = 0$
on peut utiliser : $y = g(x, y) = [1 - \ln(xy)]^{2/3}$
ou bien : $y = h(x, y) = \dfrac{\exp\left(1-y^{3/2}\right)}{x}$.

2.2.2. Développements limités

• De façon générale, cette méthode consiste à utiliser des développements limités au voisinage d'une solution particulière $\{x_0, y_0\}$ connue.

• Première variante : pour chaque occurrence de y dans l'expression $f(x, y)$, on développe en fonctions de $\delta = y - y_0$. En reportant dans l'équation implicite et en simplifiant, on obtient une équation algébrique donnant δ.

L'inconvénient de cette méthode est que l'équation obtenue pour δ est de degré d'autant plus élevé que le développement est d'ordre élevé : au delà de l'ordre 2, cela redonne de fait une équation implicite.

◊ remarque : les notations sont parfois plus simples en posant : $\delta = \dfrac{y-y_0}{y_0}$.

• Seconde variante : on utilise plus généralement un développement limité de l'expression y(x) cherchée : $y = y_0 + \lambda.(x - x_0) + \mu.(x - x_0)^2$ ...

En reportant dans l'équation implicite et en simplifiant, on obtient une relation algébrique plus simple donnant les coefficients développement.

◊ remarque : pour simplifier les notations, on peut poser $\varepsilon = x - x_0$ (voire éventuellement $\varepsilon = \frac{x - x_0}{x_0}$).

◊ remarque : cette méthode n'est théoriquement pas limitée, mais nécessite souvent un développement d'ordre élevé pour obtenir une approximation assez précise (les calculs sont lourds).

🕮 *exercices n° I, II et III.*