MÉTHODES D'APPROXIMATION - corrigé des exercices

I. Fonction implicite

1. • On obtient : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\,(y^2 - 3x)\sqrt{\frac{y}{x}}$ (pour $x > 0$) et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\,(5y^2 - x)\sqrt{\frac{x}{y}}$ (pour $y > 0$).

• Pour : $x = 1$ et $y = 1$: $f = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = -1$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$.

2. • La fonction est définie pour $xy \geq 0$, c'est-à-dire x et y de même signe.

• Les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur le domaine de définition de f, sauf pour les limites $x = 0$ ou $y = 0$. Ceci comprend en particulier le voisinage de $\{x = 1 \,;\, y = 1\}$.

• De plus, $f = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ pour $\{x = 1 \,;\, y = 1\}$; il existe donc, au voisinage de $x = 1$, une solution telle que $y(1) = 1$.

• En fait, on trouve facilement que l'équation a deux solutions : $y_\alpha = 0$ et $y_\beta = +\sqrt{x}$; celle correspondant aux conditions étudiées est la seconde, et sa dérivée est : $\frac{dy_\beta}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

◊ remarque : $y_\alpha = 0$ n'est pas “prévisible” car, bien que $f(1, 0) = 0$, la dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est alors pas définie (cela n'interdit en rien l'existence d'une telle solution, mais le théorème ne peut pas être utilisé pour en prédire l'existence).

II. Fonction implicite et approximations

1. • Pour $x = 1$ et $y = 1$ on obtient : $f = 0$.

• Les dérivées sont : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} = 1$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} + \frac{3}{2}\sqrt{y} = 2{,}5$.

2. • La fonction est définie pour $xy > 0$ ET $y \geq 0$, c'est-à-dire $x > 0$ et $y > 0$.

• Les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur le domaine de définition de f. Ceci comprend en particulier le voisinage de $\{x = 1 \,;\, y = 1\}$.

• De plus, $f = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ pour $\{x = 1 \,;\, y = 1\}$; il existe donc, au voisinage de $x = 1$, une solution telle que $y(1) = 1$.

• La relation $f = 0$ impose : $df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0$; on peut donc en déduire (même sans connaître explicitement y(x)) : $\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)} = -\frac{2y}{x.\left(2 + 3y^{3/2}\right)}$.

◊ remarque : ceci permet d'envisager une intégration numérique par la méthode d'Euler.

3.a. ◊ remarque : l'existence de la solution dans “un voisinage” de $x = 1$ ne prédit en rien <u>jusqu'où</u> s'étend ce voisinage ; rien ne dit que la solution existe pour $x = \frac{3}{2}$, on suppose toutefois qu'elle existe.

• À l'aide de la fonction “solve”, la valeur trouvée pour la fonction $y = y(x)$ définie implicitement par : $\ln(xy) + y^{3/2} - 1 = 0$ pour $x = \frac{3}{2}$ est : $y\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0{,}839616258059...$

◊ remarque : la convergence dure ≈ 20 secondes sur une calculatrice “moyenne”, elle est quasi-instantanée avec un ordinateur.

3.b. • Si on essaye par approximations successives en utilisant : $y = \frac{\exp\left(1 - y^{3/2}\right)}{x}$, avec une valeur initiale $y_1 = 1$, on obtient une suite divergente : $y_2 = 0{,}667$; $y_3 = 1{,}052$; $y_4 = 0{,}617$; $y_5 = 1{,}117...$

◊ remarque : $y(1) = 1$ est solution évidente est on peut supposer que $y\left(\frac{3}{2}\right)$ n'est pas très différent...

• Si on essaye par approximations successives en utilisant : $y = [1 - \ln(xy)]^{2/3}$, avec une valeur initiale $y_1 = 1$, on obtient une suite convergente : $y_2 = 0{,}707$; $y_3 = 0{,}960$; $y_4 = 0{,}739$; $y_5 = 0{,}930...$

• La limite obtenue après 100 itérations (≈ une minute) est : $y\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}839616 \pm 0{,}000002$.

3.c. • On obtient à l'ordre 1 :

$$\ln(y) = \ln(1 + \delta) \approx \delta \quad ; \quad y^{3/2} = (1 + \delta)^{3/2} \approx 1 + \frac{3}{2}\,\delta.$$

$$\frac{5}{2}\,\delta - \ln(x) = 0 \quad ; \quad \delta = \frac{2}{5}\ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0{,}16 \quad ; \quad y\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}838 \pm 0{,}010.$$

• On obtient de même à l'ordre 2 :

$$\ln(y) = \ln(1 + \delta) \approx \delta - \frac{1}{2}\,\delta^2 \quad ; \quad y^{3/2} = (1 + \delta)^{3/2} \approx 1 + \frac{3}{2}\,\delta + \frac{3}{8}\,\delta^2.$$

$$\frac{1}{8}\,\delta^2 - \frac{5}{2}\,\delta - \ln(x) = 0 \quad ; \quad \delta = -10 + \sqrt{100 + 8\ln\left(\frac{3}{2}\right)} \approx 0{,}1609 \quad ; \quad y\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}8391 \pm 0{,}0015.$$

3.d. • On obtient par exemple à l'ordre 2 :

$$y \approx 1 + \lambda\,\varepsilon + \mu\,\varepsilon^2 \quad ; \quad \ln(x) = \ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon - \frac{1}{2}\,\varepsilon^2 \ ;$$

$$\ln(y) \approx \ln[1 + (\lambda\,\varepsilon + \mu\,\varepsilon^2)] \approx (\lambda\,\varepsilon + \mu\,\varepsilon^2) - \frac{1}{2}\,(\lambda\,\varepsilon)^2 \ ;$$

$$y^{3/2} \approx [1 + (\lambda\,\varepsilon + \mu\,\varepsilon^2)]^{3/2} \approx 1 + \frac{3}{2}\,(\lambda\,\varepsilon + \mu\,\varepsilon^2) + \frac{3}{8}\,(\lambda\,\varepsilon)^2.$$

◊ remarque : pour certains calculs intermédiaires, on peut noter $\delta \approx (\lambda\,\varepsilon + \mu\,\varepsilon^2)$.

• Ceci donne l'équation : $\varepsilon - \frac{1}{2}\,\varepsilon^2 + \lambda\,\varepsilon + \mu\,\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\,\lambda^2\,\varepsilon^2 + \frac{3}{2}\,\lambda\,\varepsilon + \frac{3}{2}\,\mu\,\varepsilon^2 + \frac{3}{8}\,\lambda^2\,\varepsilon^2 \approx 0$. L'égalité impose la nullité des coefficients de chaque puissance de ε : $1 + \frac{5}{2}\,\lambda \approx 0$; $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\,\mu - \frac{1}{8}\,\lambda^2 \approx 0$. On en déduit : $\lambda = -\frac{2}{5}$ et $\mu = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}\,\lambda^2 = \frac{26}{125}$.

• Hélas, ce type de développements converge souvent médiocrement ; ainsi, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on obtient aux ordres successifs : $y_1 = 0{,}80$; $y_2 = 0{,}852$; $y_3 = 0{,}835$; $y_4 = 0{,}841...$ après un calcul à l'ordre 4 (assez “lourd”, sauf avec un logiciel de calcul formel) : $y(x) = 1 - \frac{2}{5}\varepsilon + \frac{26}{125}\varepsilon^2 - \frac{421}{3125}\varepsilon^3 + \frac{6191}{62500}\varepsilon^4...$

III. Fonction implicite et approximations

1. • Pour $x = 1$ et $y = \frac{\pi}{2}$ on obtient : $f = \pi \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \pi = 0$.

• Les dérivées sont : $\frac{\partial f}{\partial x} = 2\pi x \sin(y) = 2\pi$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \pi x^2 \cos(y) - 2 = -2$.

2. • La fonction est définie partout dans $\mathbb{R}^2$.

• Les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur le domaine de définition de f. Ceci comprend en particulier le voisinage de $\{x = 1 ; y = \frac{\pi}{2}\}$.

• De plus, $f = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ pour $\{x = 1 ; y = \frac{\pi}{2}\}$; il existe donc, au voisinage de $x = 1$, une solution telle que $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

• La relation $f = 0$ impose : $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$; on peut donc en déduire (même sans connaître explicitement y(x)) : $\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)} = -2\pi x \; \frac{\sin(y)}{\pi x^2 \cos(y) - 2}$ (bien définie au voisinage de $x = 1$).

◊ remarque : ceci permet d'envisager une intégration numérique par la méthode d'Euler.

3.a. ◊ remarque : l'existence de la solution dans “un voisinage” de $x = 1$ ne prédit en rien jusqu'où s'étend ce voisinage, et rien ne dit que la solution existe pour $x = 2$; on suppose toutefois qu'elle existe.

• Pour la fonction $y = y(x)$ définie implicitement par : $\pi x^2 \sin(y) - 2y = 0$ avec $x = 2$, les valeurs trouvées à l'aide de la fonction “solve” sont (selon les conditions initiales imposées) : $y_\alpha(2) = 0$ (solution évidente) ; $y_\beta(2) \approx 2{,}6977996212...$; $y_\gamma(2) \approx -2{,}6977996212...$; celle correspondant aux conditions étudiées est la seconde.

◊ remarque : la convergence dure ≈ 5 secondes.

3.b. • Si on essaye par approximations successives en utilisant : $y = \frac{\pi}{2} x^2 \sin(y)$, avec une valeur initiale $y_1 = 0{,}1$ ($y_\alpha = 0$ est solution évidente), on obtient une suite divergente (apparemment incohérente à cause de la périodicité du sinus): $y_2 = 0{,}63$; $y_3 = 3{,}69$; $y_4 = -3{,}26$; $y_5 = 0{,}77$...

• Si on essaye par approximations successives en utilisant : $y = \arcsin\left(\frac{2y}{\pi x^2}\right)$, avec une valeur initiale $y_1 \approx 1$ (ou 2), alors la suite converge : $y_2 = 0{,}160$; $y_3 = 0{,}025$; $y_4 = 0{,}0040$; $y_5 = 0{,}00064$... La limite obtenue après 15 itérations (≈ 10 secondes) est : $y(2) = 0 \pm 10^{-11}$.

• Si on essaye par approximations successives en utilisant (à cause de la définition de la fonction arcsin) : $y = \pi - \arcsin\left(\frac{2y}{\pi x^2}\right)$, avec une valeur initiale $y_1 \approx 1$ (ou 2), on obtient une suite convergente : $y_2 = 2{,}98$; $y_3 = 2{,}65$; $y_4 = 2{,}71$; $y_5 = 2{,}696$; $y_6 = 2{,}698$; $y_7 = 2{,}6978$... La limite obtenue après 20 itérations (≈ 10 secondes) est : $y(2) = 2{,}6977996212 \pm 10^{-10}$.

◊ remarque : à cause de la définition de la fonction arcsin, on obtient de même la solution négative en utilisant : $y = \arcsin\left(\frac{2y}{\pi x^2}\right) - \pi$.

3.c. • Avec : $y = 2.(1 + \delta)$, on obtient à l'ordre 1 : $[1 - 2\pi \cos(2)]\,\delta + 1 - \pi \sin(2) = 0$ d'où :

$$\delta = \frac{\pi \sin(2) - 1}{1 - 2\pi \cos(2)} \approx 0{,}51 \quad \text{et} \quad y(2) = 3{,}02 \pm 0{,}35.$$

◊ remarque : il faut utiliser un développement au voisinage de $y = 2$ (avec $y - 2 = 2\,\delta$ voisin de zéro) : $\sin(y) \approx \sin(2) + \cos(2)\,(y - 2) - \frac{1}{2!}\sin(2)\,(y - 2)^2 - \frac{1}{3!}\cos(2)\,(y - 2)^3$...

• On obtient de même à l'ordre 2 : $2\pi \sin(2)\,\delta^2 + [1 - 2\pi \cos(2)]\,\delta - [\pi \sin(2) - 1] = 0$ d'où on tire (solution positive) : $\delta \approx 0{,}336$ et : $y(2) = 2{,}671 \pm 0{,}027$.

◊ remarque : un développement au voisinage de $y = 3$ convergerait plus vite ; un développement au voisinage de $y = \pi$ (en posant $y = \pi - \delta$) se simplifie judicieusement et donne un assez bon résultat au premier ordre, mais par malchance le terme du second ordre est alors nul et le calcul aux ordres suivants est plus compliqué.