

MÉTHODES D'APPROXIMATION - exercices

I. Fonction implicite

- On considère la fonction : $f(x, y) = (y^2 - x)\sqrt{xy}$; calculer les valeurs respectives de f , $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour : $x = 1$ et $y = 1$.
- Montrer qu'au voisinage de $x = 1$ la relation $f(x, y) = 0$ définit implicitement une fonction $y = y(x)$ et calculer la dérivée correspondante $\frac{dy(x)}{dx}$.

II. Fonction implicite et approximations

- On considère la fonction : $f(x, y) = \ln(xy) + y^{3/2} - 1$; calculer les valeurs respectives de f , $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour : $x = 1$ et $y = 1$.
- Montrer qu'au voisinage de $x = 1$ la relation $f(x, y) = 0$ définit implicitement une fonction $y = y(x)$ et calculer la dérivée correspondante $\frac{dy(x)}{dx}$.
- On cherche à calculer, pour $x = \frac{3}{2}$, la valeur de la fonction $y = y(x)$ définie implicitement par la relation : $f(x, y) = \ln(xy) + y^{3/2} - 1 = 0$.
 - Effectuer le calcul à l'aide de la fonction "solve" de la calculatrice.
 - Essayer de résoudre par approximations successives en utilisant :

$$y = [1 - \ln(xy)]^{2/3} \quad \text{puis : } y = \frac{\exp(1 - y^{3/2})}{x}$$
 - En effectuant un développement limité de $f(x, y)$ en fonction de $\delta = y - 1$, établir la relation imposée à δ . Appliquer cette méthode pour $x = \frac{3}{2}$ avec un développement à l'ordre 1, puis avec un développement à l'ordre 2.
 - En posant : $\varepsilon = x - 1$, calculer les coefficients d'un développement limité (au moins à l'ordre 2) de $y(x)$ au voisinage de $x_0 = 1$. Ceci est-il applicable pour $x = \frac{3}{2}$?

III. Fonction implicite et approximations

- On considère la fonction : $f(x, y) = \pi x^2 \sin(y) - 2y$; calculer les valeurs respectives de f , $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour : $x = 1$ et $y = \frac{\pi}{2}$.
- Montrer qu'au voisinage de $x = 1$ la relation $f(x, y) = 0$ définit implicitement une fonction $y = y(x)$ et calculer la dérivée correspondante $\frac{dy(x)}{dx}$.
- On cherche à calculer, pour $x = 2$, la valeur de la fonction $y = y(x)$ définie implicitement par la relation : $f(x, y) = \pi x^2 \sin(y) - 2y = 0$.
 - Effectuer le calcul à l'aide de la fonction "solve" de la calculatrice.

b) Essayer de résoudre par approximations successives en utilisant :

$$y = \frac{\pi}{2} x^2 \sin(y) \quad \text{puis : } y = \arcsin\left(\frac{2y}{\pi x^2}\right) \quad \text{ou } y = \pi - \arcsin\left(\frac{2y}{\pi x^2}\right)$$

c) Résoudre par développement en fonction de : $\delta = \frac{y-2}{2}$, c'est à dire en posant : $y = 2.(1 + \delta)$.

♦ remarque : on se limite ici à estimer $y(2)$ sans chercher un développement de $y(x)$ en fonction de $\varepsilon = x - 2$.