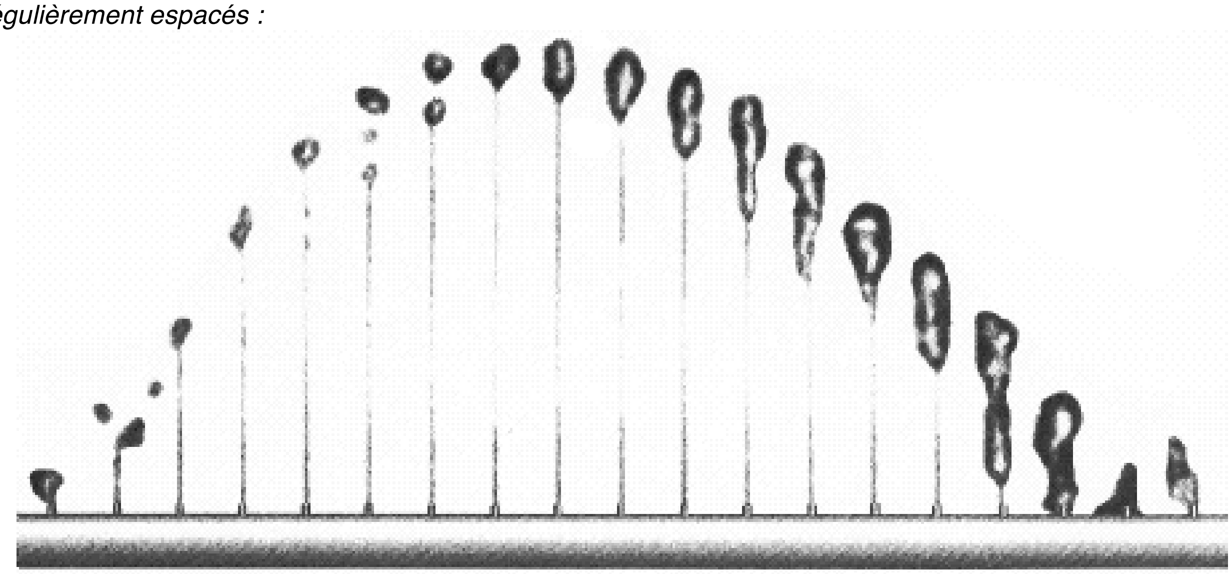
[MathSup/M18 : 11 points]

Oscillation d'un jet d'eau

Un jet d'eau oblique suit une trajectoire quasi-parabolique (chute libre), mais un jet d'eau vertical présente forcément des interactions complexes entre l'eau qui monte et l'eau qui redescend.

Dans certaines conditions (débit, vitesse...) ces interactions aboutissent à des oscillations : un "paquet" d'eau s'accumule en haut, d'abord soulevé par la partie basse du jet, puis ce paquet finit par retomber en "écrasant" le jet ; le phénomène recommence ensuite ainsi périodiquement. Ceci est visualisé sur le graphique suivant, où sont juxtaposées plusieurs représentations du jet à des instants successifs régulièrement espacés :



(montage photographique : revue "Pour la Science")

Étude de la partie inférieure du jet

• Pour étudier ce phénomène, on se propose de modéliser la partie inférieure du jet (bien qu'il y soit quasi-continu) comme une succession de gouttes d'eau. Cette approximation n'est pas trop grossière car la fluidité du liquide réduit les interactions des différentes portions de cette partie du jet.

• On mesure le rayon r_0 de l'orifice de sortie du jet, ainsi que son débit D (volume d'eau par unité de temps).

1. • Si on représente la partie basse du jet comme une succession de gouttes de rayon r_0 lancées à intervalles de temps τ et à la vitesse v_0, montrer que : $\tau = \frac{4\pi r_0^3}{3D}$ et $v_0 = \frac{D}{\pi r_0^2}$.

2. • Pour simplifier les calculs, on raisonne ici en représentant les gouttes par des points matériels. On néglige les frottements sur l'air.

a) Calculer l'altitude de la première goutte en fonction du temps.

b) Calculer l'altitude maximale atteinte, notée H, ainsi que l'instant T où cette altitude est atteinte.

c) Par un simple décalage de l'origine du temps, exprimer de même (sans aucun calcul) l'altitude de la deuxième goutte en fonction du temps.

d) En déduire l'évolution, en fonction du temps, de la distance séparant les centres des deux gouttes (considérées comme ponctuelles) : $h(t) = v_0\tau - \frac{1}{2}g\tau.(2t - \tau)$.

◊ remarque : puisque cette distance diminue, les gouttes doivent se "tasser" ; mais ce n'est pas une difficulté pour le fluide : le jet s'élargit (on suppose négligeable l'influence sur le mouvement vertical de l'eau).

Formation du “paquet” supérieur

3. • On raisonne maintenant avec un jet continu (c'est plus simple pour le calcul envisagé).

• Compte tenu des observations expérimentales (l'eau qui s'accumule au sommet tend à s'écouler sur les côtés du jet), on considère qu'il se forme au sommet un “paquet” approximativement cylindrique, de rayon R et de hauteur 2L (son centre d'inertie est au milieu).

• La hauteur initiale est $2L_0 = R$ et le paquet se situe entre les altitudes $Z' = H - R$ et $Z'' = H$.

a) En supposant que l'eau de la partie inférieure du jet se déplace en régime continu, justifier que le débit est constant, puis en déduire l'élargissement du rayon du jet : $r(z) = \dfrac{r_0}{\left(1-\dfrac{z}{H}\right)^{1/4}}$.

◊ remarque : l'expression précédente tend vers l'infini à l'approche de H, ce qui est physiquement impossible, d'où la modélisation proposée pour une accumulation limitée par un écoulement sur les côtés ; plus précisément, dès que le jet s'élargit trop, les forces de capillarité (ici négligées) tendent à limiter l'élargissement et les frottements sur l'air tendent à ralentir l'eau sur les bords, qui retombe alors sur les côtés.

b) On suppose le paquet formé dès qu'est vérifiée la “condition de raccordement” : $r(H - R) = R$; en déduire que : $R = \left(\dfrac{D^2}{2\pi^2 g}\right)^{1/5}$.

Évolution du “paquet” supérieur

• Dans cette partie, on étudie le mouvement de chute du paquet, sous l'effet de la pesanteur, alors qu'elle s'allonge en même temps puisqu'elle est “alimentée” par la partie inférieure du jet.

• On considère que le paquet commence sa chute approximativement à l'instant T, considéré comme la durée de “montée” du jet. Pour la suite du raisonnement (étude de la descente), on prend cet instant comme nouvelle origine du temps.

4. • On considère un instant où le paquet a une hauteur 2L (entre Z' et Z”) et où l'eau qui le constitue a une vitesse **algébrique** V (négative lorsque le paquet descend).

a) Exprimer la vitesse relative V' d'arrivée de la partie inférieure du jet sur le paquet.

b) Justifier que le débit d'entrée est $D' = D\dfrac{V'}{v(Z')}$.

c) En déduire l'augmentation $2\,\delta L$ de la hauteur du paquet pendant δt.

☞ Pour simplifier la suite du calcul, on négligera l'influence de $\dfrac{dL}{dt}$: $V' \approx v(Z') - V$.

5. • Pour étudier ce système variable (auquel on ne peut pas appliquer la mécanique du point matériel), on se ramène à un système $\mathcal{S}$ non variable : l'ensemble de la goutte et d'une petite quantité d'eau supplémentaire, de volume $\delta\mathcal{V}$, qui s'y ajoute pendant un intervalle de temps δt.

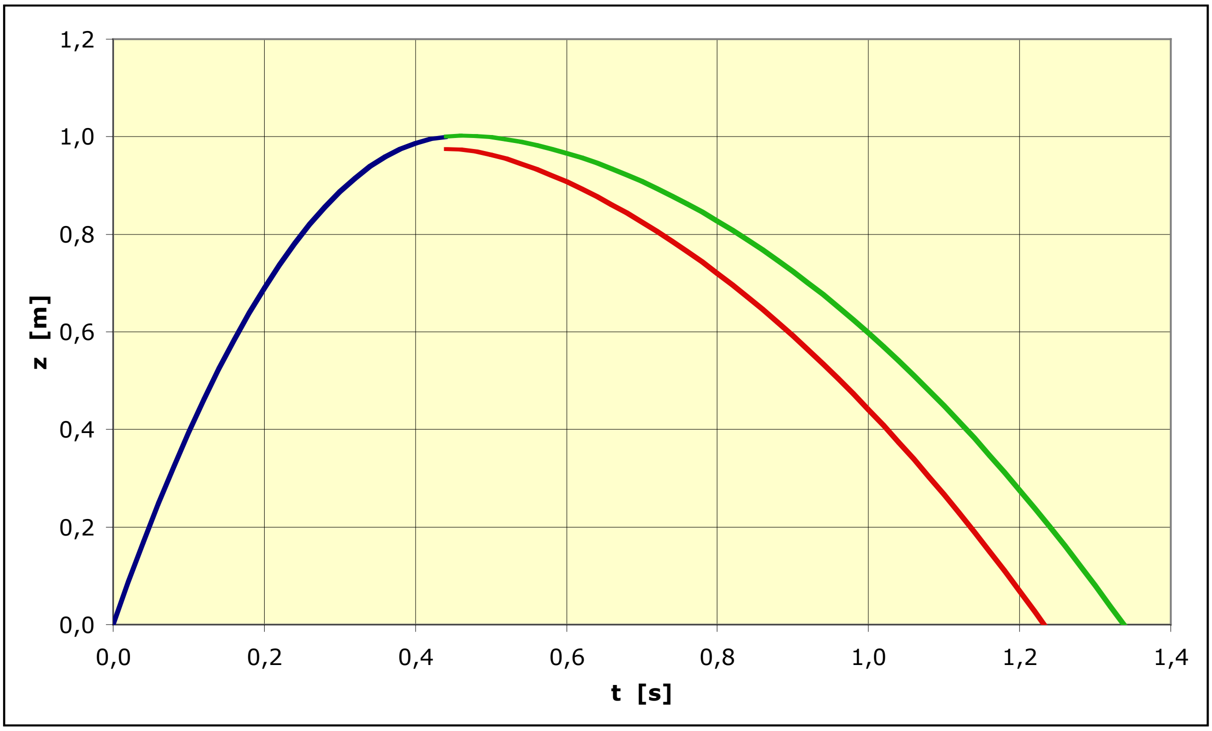
a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique au système $\mathcal{S}$, exprimer la variation **algébrique** δp de sa quantité de mouvement, sous l'effet de la pesanteur, pendant l'intervalle δt.

b) En déduire la variation δV de sa vitesse algébrique pendant δt.

c) Pendant δt, exprimer les “déplacements” $\delta Z''$ et $\delta Z'$ (compte tenu de l'allongement $2\,\delta L$ par le bas).

6. • Les différentes quantités intervenant ici sont liées par un système d'équations compliqué ; on se propose de le résoudre numériquement par la méthode d'Euler.

• Commenter la courbe suivante, ainsi obtenue avec : $H = 1{,}00$ m ; $r_0 = 1{,}00$ cm ; $g = 9{,}81$ m.s^{-2} ; $V(T) = 0{,}10$ m.s^{-1} (intermédiaire entre $v(H - R)$ et $v(H) = 0$).


1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
z [m]
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
t [s]

[MathSup/M18 : 11 points]

1. • Pendant une durée τ, il sort un volume d'eau $\mathcal{V}_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 = D\tau$; donc $\tau = \frac{4\pi r_0^3}{3D}$.

• Pendant une durée τ, l'eau à la base monte d'une hauteur $h_0 = v_0\tau$; le volume qui sort de l'orifice de surface $S = \pi r_0^2$ est $\mathcal{V}_0 = h_0 S = D\tau$; donc $v_0 = \frac{D}{\pi r_0^2}$.

◊ remarque : ceci correspond à $h_0 = \frac{4}{3} r_0 < 2r_0$, c'est-à-dire que l'écart entre les centres des gouttes successives est inférieur à leur diamètre, donc les gouttes se “superposent” ; c'est normal, dans l'approximation de ce calcul, puisque le modèle utilisé représente un jet en réalité continu.

2.a. • La seule force est le poids, donc le principe de la dynamique donne (algébriquement selon l'axe vertical) : $ma = -mg$.

• Pour une accélération constante, l'intégration donne : $z_1(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ (en prenant l'origine au point de départ du jet).

2.b. • La vitesse verticale de cette goutte est : $v_1(t) = v_0 - gt$. Cette vitesse s'annule à l'instant $T = \frac{v_0}{g}$.

• L'altitude maximale est ainsi : $H = z_1(T) = \frac{v_0^2}{2g}$.

2.c. • De même pour la deuxième goutte, en décalant de τ : $z_2(t) = v_0.(t - \tau) - \frac{1}{2}g.(t - \tau)^2$.

2.d. • La distance entre les deux centres est : $h(t) = z_1(t) - z_2(t) = v_0\tau - \frac{1}{2}g\,\tau.(2t - \tau)$.

◊ remarque : on retrouve $h(t) = h_0$ pour $t = \frac{\tau}{2}$, c'est-à-dire au milieu de l'intervalle entre les départs des deux premières gouttes.

3.a. ◊ remarque : on peut imaginer de chercher $h(z)$ puis d'en déduire le rayon par conservation du volume ; il est plus direct de raisonner à partir d'un débit constant (en régime continu).

• En régime continu, il n'y a pas d'accumulation d'eau (sauf en haut, mais la partie supérieure du jet n'est pas étudiée ici). Dans chaque portion du jet, le débit entrant et le débit sortant, tout deux constants dans le temps (régime constant), doivent être égaux ; donc le débit est aussi indépendant de z.

• La vitesse de l'eau du jet décrite par la première goutte est un cas particulier donnant des informations générales puisque le régime est continu ; elle peut s'écrire : $v(t) = v_0 - gt$. L'altitude correspondante est alors : $z(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. L'élimination du temps entre les deux donne : $v(z) = \sqrt{v_0^2 - 2gz}$.

◊ remarque : on peut aussi utiliser le théorème de l'énergie cinétique.

• Le débit peut se calculer comme le produit de cette vitesse par la section du jet : $D = v(z).S(z)$ avec $S(z) = \pi r(z)^2$. Puisque ce débit est indépendant de z en régime continu : $v(z).r(z)^2 = v_0.r_0^2$ et finalement (après simplification) : $r(z) = \frac{r_0}{\left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1/4}}$.

3.b. • La condition correspond à : $\frac{r_0}{\left(\frac{R}{H}\right)^{1/4}} = R$; on en déduit : $R = (H\, r_0^4)^{1/5} = \left(\frac{D^2}{2\pi^2 g}\right)^{1/5}$.

◊ remarque : on constate que le résultat ne dépend pas du diamètre du tube, ce qui n'était pas initialement évident.

4.a. • La vitesse relative est la différence entre la vitesse de montée du jet (à la base du paquet) et la vitesse d'évolution de la partie inférieure du paquet (compte tenu de l'allongement).

• La partie inférieure évolue à la vitesse : $V - \frac{dL}{dt}$; la vitesse cherchée est : $V' = v(Z') - V + \frac{dL}{dt}$.

◊ remarque : $V' \geq v(Z')$ lorsque $V \leq 0$ puisque L augmente.

4.b. • Le débit est le produit de la vitesse du fluide par la section du jet. Puisque le paquet descend à la rencontre du jet, c'est la vitesse du mouvement relatif qui intervient ici ; le débit d'entrée de l'eau dans le paquet est donc supérieur au débit de montée de l'eau : $D' = D \frac{V'}{v(Z')}$.

4.c. • L'augmentation de volume est $\delta\mathcal{V} = 4\pi R^2 \, \delta(2L) = D' \, \delta t$.

• L'augmentation de la hauteur est : $2 \, \delta L = \frac{D'}{4\pi R^2} \, \delta t$.

5.a. • En notant $\mu = 1{,}00 \text{ kg.L}^{-1}$ la masse volumique de l'eau, la masse de l'ensemble peut s'écrire $M + \delta m$ avec $M = \mu \, \pi R^2 \, 2L$ et $\delta m = \mu \, \pi R^2 \, 2 \, \delta L$.

• Pendant cet intervalle de temps, la force de pesanteur impose : $\delta p = -(M + \delta m) \, g \, \delta t \approx - M \, g \, \delta t$.

◊ remarque : le terme du second ordre $\delta m \, \delta t$ doit être négligé.

5.b. • La quantité de mouvement avant δt est (avec l'approximation indiquée) : $p = M \, V + \delta m \, v(Z')$.

• La quantité de mouvement après est : $p + \delta p = (M + \delta m) \, (V + \delta V) = M \, V + \delta m \, v(Z') - M \, g \, \delta t$.

• Par comparaison (en négligeant le terme $\delta m \, \delta V$) la variation de vitesse est :

$$\delta V = \frac{\delta m}{M} \, V' - g \, \delta t = \frac{D'V'}{8\pi R^2 L} \, \delta t - g \, \delta t.$$

5.c. • Le déplacement du sommet est uniquement causé par la vitesse V : $\delta Z'' = V \, \delta t$.

• Le “déplacement” (apparent) du bas est : $\delta Z' = V \, \delta t - 2 \, \delta L$.

6. • On constate que l'allure générale est la bonne.

• On constate que la durée de descente du paquet (repéré par son milieu) est un peu plus longue que celle de la montée du jet : $T' \approx 0{,}85$ s pour $T \approx 0{,}44$ s (rapport $\approx 1{,}9$). Bien qu'un peu différentes, ces proportions sont comparables à celles de l'exemple expérimental : rapport $\approx 1{,}4$.

◊ remarque : tout se passe (dans ce modèle) comme si le paquet, plus ou moins “soutenu” par la partie inférieure du jet, était soumis à une pesanteur plus faible.

• On vérifie que la variation de hauteur du paquet, décrite par $\frac{dL}{dt}$, est effectivement nettement moins importante que l'abaissement de sa partie supérieure, décrite par V. Ceci est conforme à l'exemple expérimental et justifie l'approximation indiquée par l'énoncé.