A.M. V - MÉTHODE D'EULER

1. Méthode de base

• La méthode d'Euler a pour but la résolution approchée d'équations différentielles par extrapolation à partir de conditions initiales données.

Soit $y = y(x)$ une fonction inconnue, définie par une équation différentielle de la forme : $\frac{dy}{dx} = f(x,\ y(x))$ où f est une expression littérale “relativement régulière”, et soient $\{x_0,\ y_0 = y(x_0)\}$ les conditions initiales données.

Pour $x_1 = x_0 + \Delta x$ “assez voisin” de x_0, on peut utiliser l'approximation :

$$\frac{dy}{dx} \approx f(x_0,\ y_0)\ \ ;\ \ y_1 = y(x_1) \approx y_0 + f(x_0,\ y_0)\ \Delta x\ \ ;$$

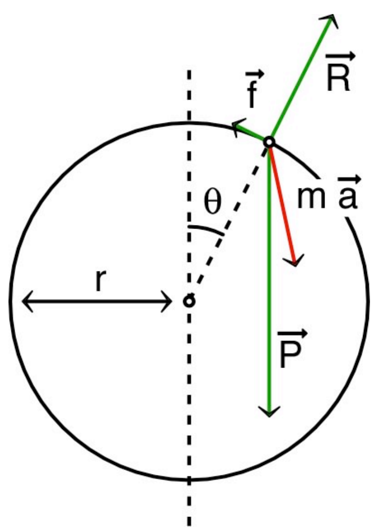
d'où le calcul par extrapolation de proche en proche :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x\ \ ;\ \ y_{n+1} = y(x_{n+1}) \approx y_n + f(x_n,\ y_n)\ \Delta x.$$

◊ remarque : l'application de cette méthode en physique est tout de même limitée : avec Δx trop grand on utilise un calcul trop approximatif de la dérivée ; avec Δx trop petit on cumule les approximations d'arrondis.

2. Application au glissement d'un point sur une sphère

• On étudie un point, mobile sur une cercle vertical de rayon r, lâché près du sommet avec une vitesse initiale nulle ; ce point est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale $\vec{R}$ et au frottement $\vec{f}$.



En coordonnées polaires, avec θ mesuré à partir de la verticale, on obtient (lors du mouvement) :

$$\vec{R} = R\ \overrightarrow{u_r}\ \ ;\ \ \vec{f} = -f\ \overrightarrow{u_\theta}\ \ ;$$

$$\vec{P} = -mg\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_r} + mg\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}\ \ ;$$

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\ \overrightarrow{u_\theta}\ \ ;\ \ \vec{a} = -r\dot{\theta}^2\ \overrightarrow{u_r} + r\ddot{\theta}\ \overrightarrow{u_\theta}\,.$$

Le principe fondamental de la dynamique peut s'écrire : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}$.

On aboutit ainsi aux deux équations :

$$mr\ddot{\theta} = mg\sin(\theta) - f \quad ; \qquad (1)$$
$$R = mg\cos(\theta) - mr\dot{\theta}^2 \quad ; \qquad (2)$$

liées par la condition : $f = \lambda\, R$ (dépendant de θ).

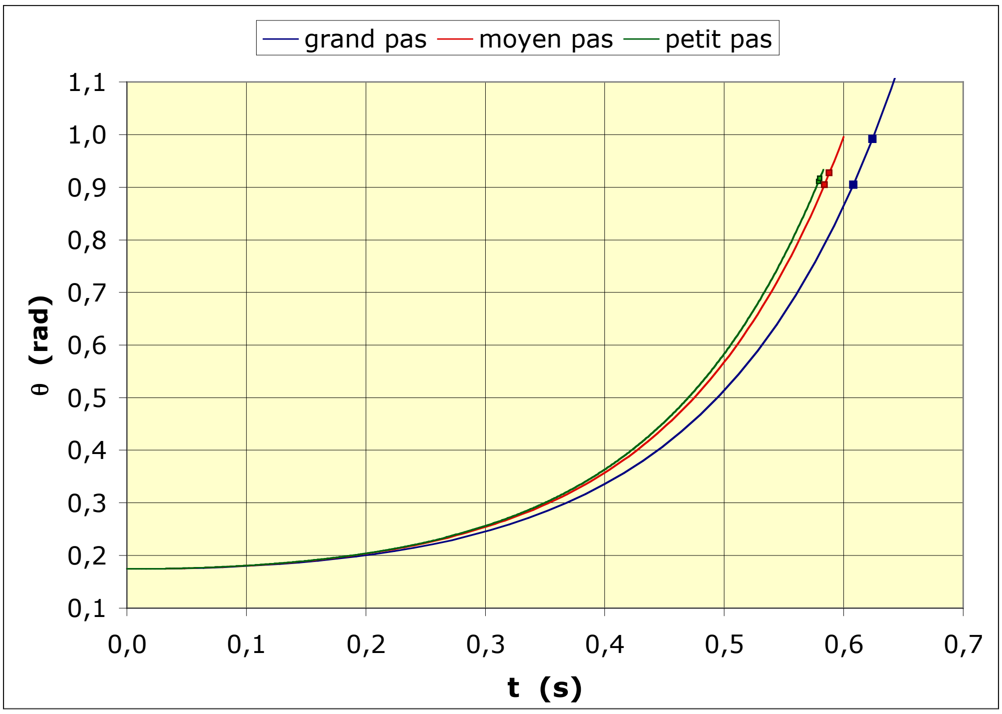
• Dans l'équation *(1)* : $f(\theta) = \lambda\, R(\theta) = \lambda m\, [g\cos(\theta) - r\dot{\theta}^2]$ et donc :

$$r\ddot{\theta} - \lambda\, r\dot{\theta}^2 = g\sin(\theta) - \lambda\, g\cos(\theta) \qquad (3).$$

Cette relation est un peu plus compliquée que l'exemple envisagé précédemment, puisqu'elle est du second ordre : $\ddot{\theta}(t) = \varphi(t, \theta(t), \dot{\theta}(t))$ (comme c'est souvent le cas en physique).

On peut généraliser simplement la méthode d'Euler en calculant :

$$\ddot{\theta}_0 = \varphi(t_0, \theta_0, \dot{\theta}_0) \quad ;$$
$$t_{n+1} = t_n + \Delta t \quad ; \quad \dot{\theta}_{n+1} \approx \dot{\theta}_n + \ddot{\theta}_n\, \Delta t \quad ;$$
$$\theta_{n+1} \approx \theta_n + \dot{\theta}_n\, \Delta t \quad ; \quad \ddot{\theta}_{n+1} = \varphi(t_{n+1}, \theta_{n+1}, \dot{\theta}_{n+1}).$$



◊ remarque : on constate ici que, si elle est raisonnablement fine, la taille du pas de calcul peut ne causer que des incertitudes acceptables.

3. Une amélioration possible de la méthode

• Pour $x_1 = x_0 + \Delta x$ "assez voisin" de x_0, on peut proposer l'approximation :

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1)}{2}$$

mais on a besoin de $\frac{dy}{dx}$ pour calculer y_1 et réciproquement.

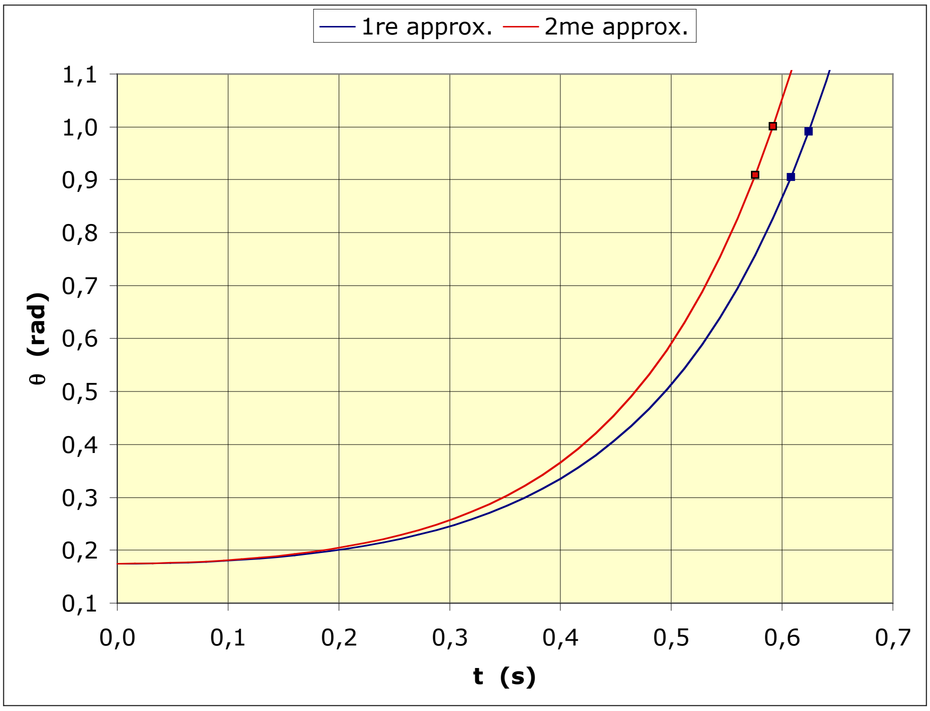
Pour cela on calcule la seconde approximation de $\frac{dy}{dx}$ à l'aide de la première approximation de y_1 ; puis on en déduit une seconde approximation de y_1 :

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{f(x_0,y_0)+f\big(x_1,y_0+f(x_0,y_0)\,\Delta x\big)}{2} \quad ;$$

$$y_1 \approx y_0 + \frac{f(x_0,y_0)+f\big(x_1,y_0+f(x_0,y_0)\,\Delta x\big)}{2}\,\Delta x \quad \text{(et ainsi de suite).}$$

4. Application au glissement d'un point sur une sphère

• L'application au problème précédent permet une amélioration (en pratique, cela peut éviter de devoir utiliser un pas de calcul trop fin) :



• Le calcul n'est toutefois pas évident pour une équation du second ordre ; en simplifiant puisqu'ici φ ne dépend pas explicitement du temps :

$$\ddot{\theta}_0 = \varphi(\theta_0, \dot{\theta}_0) \;;\; t_{n+1} = t_n + \Delta t \;;$$

calculs intermédiaires :

$$\dot{\theta}_{n+1} \approx \dot{\theta}_n + \varphi(\theta_n, \dot{\theta}_n)\,\Delta t \;\text{ (non amélioré) ;}$$

$$\theta_{n+1} \approx \theta_n + \frac{1}{2}(\dot{\theta}_n + \dot{\theta}_{n+1})\,\Delta t \;\text{ (semi-amélioré car } \dot{\theta}_{n+1} \text{ ne l'est pas) ;}$$

$$\ddot{\theta}_{n+1} = \varphi(\theta_{n+1}, \dot{\theta}_{n+1}) \;\text{ (semi-amélioré) ;}$$

calculs corrigés :

$$\dot{\theta}_{n+1} \approx \dot{\theta}_n + \frac{1}{2}[\varphi(\theta_n, \dot{\theta}_n) + \varphi(\theta_{n+1}, \dot{\theta}_{n+1})]\,\Delta t \;;$$

$$\theta_{n+1} \approx \theta_n + \frac{1}{2}(\dot{\theta}_n + \dot{\theta}_{n+1})\,\Delta t \;;$$

$$\ddot{\theta}_{n+1} = \varphi(\theta_{n+1}, \dot{\theta}_{n+1}).$$

◊ remarque : il est possible d'améliorer encore plus la précision en poussant le calcul aux ordres suivants (méthode de Runge-Kutta) ; pour les intégrales du second ordre, il existe aussi une version simplifiée (mais un peu moins précise) pour l'amélioration au second ordre (méthode de Newton-Hooke).