Oscillations sur un arc de parabole

Dans un plan vertical, on considère un rail d'équation $z = \alpha x^2$; un mobile M de masse m se déplace sans frottement sur ce rail
Le mobile est fixé à un ressort, de raideur k et le longueur à vide l_0 ; l'autre extrémité du ressort est fixée sur l'axe vertical à une altitude $-l_0$
On se propose d'utiliser la méthode d'Euler pour étudier le mouvement d'oscillation de grande amplitude
$z := \alpha \cdot x^2$

$$\alpha x^2 \tag{1}$$

$l := \sqrt{x^2 + (z + l0)^2}$

$$\sqrt{x^2 + \alpha^2 x^4 + 2\,\alpha x^2\, l0 + l0^2} \tag{2}$$

$Ep := m \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (l - l0)^2$

$$m\,g\,\alpha x^2 + \frac{1}{2}\,k\left(\sqrt{x^2 + \alpha^2 x^4 + 2\,\alpha x^2\, l0 + l0^2} - l0\right)^2 \tag{3}$$

$Ec := \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(1 + \left(\frac{d}{dx}\, z\right)^2\right) \cdot xp^2$

$$\frac{1}{2}\, m \left(1 + 4\,\alpha^2 x^2\right) xp^2 \tag{4}$$

$eq := 0 = \frac{d}{dx}\, Ep + \frac{d}{dx}\, Ec + \frac{\mathrm{xpp}}{xp} \cdot \frac{d}{d\,xp}\, Ec$

$$0 = 2\, m\, g\, \alpha\, x + \frac{1}{2}\, \frac{k\left(\sqrt{x^2 + \alpha^2 x^4 + 2\,\alpha x^2\, l0 + l0^2} - l0\right)\left(2\,x + 4\,\alpha^2 x^3 + 4\,\alpha\, x\, l0\right)}{\sqrt{x^2 + \alpha^2 x^4 + 2\,\alpha x^2\, l0 + l0^2}} + 4\, m\, \alpha^2\, x\, xp^2 + xpp\, m\left(1 + 4\,\alpha^2 x^2\right) \tag{5}$$

$eq1 := 0 = 2\, g\, \alpha\, x + ksm\left(1 - \frac{l0}{ll}\right)\left(x + 2\,\alpha^2 x^3 + 2\,\alpha\, x\, l0\right) + 4\,\alpha^2\, x\, xp^2 + xpp\left(1 + 4\,\alpha^2 x^2\right)$

$$0 = 2\, g\, \alpha\, x + ksm\left(1 - \frac{l0}{ll}\right)\left(x + 2\,\alpha^2 x^3 + 2\,\alpha\, x\, l0\right) + 4\,\alpha^2\, x\, xp^2 + xpp\left(1 + 4\,\alpha^2 x^2\right) \tag{6}$$

Pour les petites oscillations $K = \frac{d^2 Ep}{dx^2}(0) = 2\alpha mg$ (le ressort est sans effet) ; à l'ordre le plus bas :

$\omega_0 = \sqrt{2\,\alpha g}$
$eq0 := 0 = 2\, g\, \alpha\, x + xpp$

$$0 = 2\, g\, \alpha\, x + xpp \tag{7}$$