A.M. IX - PRODUIT VECTORIEL

1. Notion de produit vectoriel

1.1. Approche géométrique

• Pour deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ non colinéaires, on peut définir un vecteur “produit vectoriel” $\vec{V} = \vec{A} \times \vec{B}$ par ses propriétés :

direction : perpendiculaire aux plans de base $(\vec{A}\ ;\ \vec{B})$;

sens : tel que $(\vec{A}\ ;\ \vec{B}\ ;\ \vec{V})$ soit une base directe ;

norme : $V = \left\|\vec{V}\right\| = A\,B\,\left|\sin\left(\vec{A} \,\hat{;}\, \vec{B}\right)\right|$.

Par généralisation logique pour deux vecteurs colinéaires : $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$.

◊ remarque : la notation “officielle” internationale × n’est pas la plus usuelle en France, où l’opérateur $\wedge$ est souvent préféré ; ce dernier est toutefois ambigü car il est aussi utilisé pour désigner d’autres opérations (cf. annexe).

• Ce produit vectoriel est antisymétrique et distributif :

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad ; \quad \vec{A} \times (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) = \vec{A} \times \vec{B}_1 + \vec{A} \times \vec{B}_2.$$

Il n’est par contre pas associatif, ainsi pour $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ni nuls ni colinéaires :

$$\vec{A} \times (\vec{A} \times \vec{B}) \neq \vec{0} \quad ; \quad (\vec{A} \times \vec{A}) \times \vec{B} = \vec{0}.$$

1.2. Approche analytique

• D’après les propriétés précédentes, on peut utiliser la décomposition sur une base orthonormée $(\overrightarrow{u_x}\ ;\ \overrightarrow{u_y}\ ;\ \overrightarrow{u_z})$:

$$\overrightarrow{u_x} \times \overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{u_z} \quad ; \quad \overrightarrow{u_y} \times \overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_x} \quad ; \quad \overrightarrow{u_z} \times \overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{u_y} \ ;$$

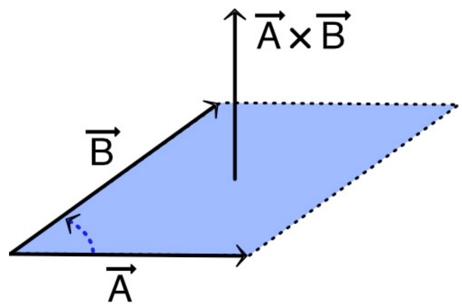
$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x\,\overrightarrow{u_x} + A_y\,\overrightarrow{u_y} + A_z\,\overrightarrow{u_z}) \times (B_x\,\overrightarrow{u_x} + B_y\,\overrightarrow{u_y} + B_z\,\overrightarrow{u_z}) \ ;$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\overrightarrow{u_x} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\overrightarrow{u_y} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\overrightarrow{u_z}.$$

2. Annexe

2.1. Produit extérieur

• On peut définir un “produit extérieur” $\vec{A} \wedge \vec{B}$ de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ par la surface orientée qu’ils délimitent.

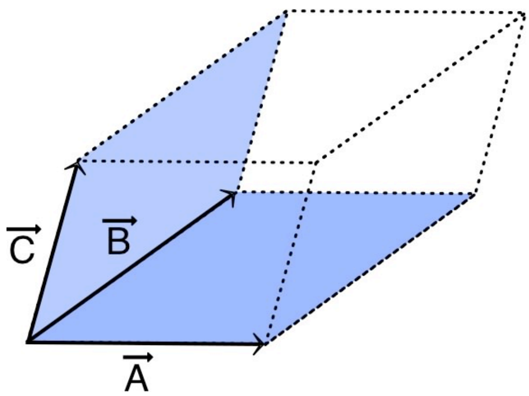


Ce produit extérieur est antisymétrique et distributif.

• En se limitant à ce niveau, le produit extérieur n’est pas indépendant du produit vectoriel puisque $\vec{A} \times \vec{B}$ peut être utilisé pour représenter la surface orientée.

La généralisation à trois vecteurs correspond au volume orienté ainsi délimité. Une différence essentielle est que le produit extérieur est associatif :

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}).$$



◊ remarque : ce volume peut difficilement être représenté par un vecteur ; sa mesure correspond au produit mixte : $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$.

2.2. Autre produit extérieur

• À partir de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de coordonnées (A_x, A_y, A_z) et (B_x, B_y, B_z), on peut définir un tenseur $\vec{A} \otimes \vec{B}$ dont les coordonnées peuvent s’écrire :

$$\begin{pmatrix} A_xB_x & A_xB_y & A_xB_z \\ A_yB_x & A_yB_y & A_yB_z \\ A_zB_x & A_zB_y & A_zB_z \end{pmatrix}.$$

On peut ensuite définir un produit extérieur : $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{A} \otimes \vec{B} - \vec{B} \otimes \vec{A}$ dont les coordonnées peuvent s'écrire :

$$\begin{pmatrix} 0 & A_xB_y - A_yB_x & A_xB_z - A_zB_x \\ A_yB_x - A_xB_y & 0 & A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z & A_zB_y - A_yB_z & 0 \end{pmatrix}.$$

• Ce produit extérieur n'est pas rigoureusement identique au précédent, mais il est équivalent pour un certain nombre de propriétés ; ainsi, il est antisymétrique, distributif et associatif.

• Dans le cas particulier de deux vecteurs à trois coordonnées, on constate que le tenseur antisymétrique ainsi associé n'a que trois coordonnées indépendantes, d'où la possibilité de le représenter par un vecteur, qui correspond au produit vectoriel.

Les propriétés tensorielles font toutefois qu'il existe des transformations ponctuelles pour lesquelles cet objet ne se transforme pas comme un vecteur (on dit que c'est un “pseudo-vecteur”).

◊ remarque : avec ces notations, le produit $\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C}$ donne un tenseur à trois indices, totalement antisymétrique, dont les seules composantes non nulles correspondent aux six permutations de (xyz) ; elles sont égales en valeur absolue au volume envisagé dans la partie précédente, avec le même signe pour les permutations directes.