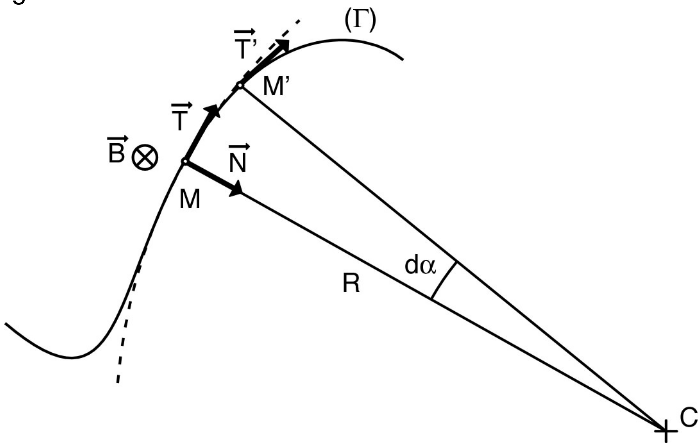
A.C. II - TRIÈDRE DE FRÉNET

1. Description vectorielle

• La trajectoire d'un point est l'ensemble de ses positions successives, indépendamment de l'ordre dans lequel ces positions sont atteintes.

Une façon d'étudier le mouvement d'un point peut être de décrire les équations de sa trajectoire (deux équations dans l'espace à trois dimensions), puis de décrire le mouvement sur cette trajectoire.

• On peut ainsi définir une abscisse curviligne s , longueur algébrique parcourue par M le long de sa trajectoire à partir d'un point fixe M_0 de celle ci, choisi comme origine.



On définit alors la tangente $(\mathcal{T})$ en M comme la limite de la droite de direction MM' quand $M' \to M$; le vecteur unitaire de la tangente est : $\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{M_0M}}{ds}$ (orienté dans le sens "positif" de s).

• On considère ensuite l'angle $d\alpha$ entre les tangentes respectives $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}')$ en M et M' , puis la limite quand $M' \to M$: $\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds}$ (quantité nommée "courbure") ; R est alors appelé "rayon de courbure" de la trajectoire au point M .

◊ remarque : si M est un point d'inflexion de la courbe, le “rayon de courbure” est infini (courbure nulle).

• On définit le vecteur unitaire normal en M par la limite : $\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{d\alpha} = R\ \frac{d\vec{T}}{ds}$.

Le point C situé à la distance R sur la normale en M est appelé “centre instantané de rotation”.

• On définit enfin un vecteur unitaire “binormal” $\vec{B}$ tel que le trièdre de Frénet $\left(\vec{T},\ \vec{N},\ \vec{B}\ \right)$ soit orthonormé et direct.

• Avec ces notations, la vitesse de M s'écrit : $\vec{v} = \dot{\overrightarrow{OM}} = \frac{d\overrightarrow{M_0M}}{ds}\ \frac{ds}{dt} = \dot{s}\ \vec{T}$.

◊ remarque : cette vitesse n'est pas calculée par rapport à un référentiel dont $\left(M\ ;\ \vec{T},\ \vec{N},\ \vec{B}\ \right)$ est un repère (une telle vitesse serait nulle !) ; c'est la vitesse par rapport à $\left(O\ ;\ \vec{u}_x\ ,\ \vec{u}_y\ ,\ \vec{u}_z\ \right)$, <u>réexprimée</u> dans la base de Frénet.

• On obtient de même pour l'accélération : $\vec{a} = \ddot{\overrightarrow{OM}} = \dot{\vec{v}} = \ddot{s}\ \vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R}\ \vec{N}$.

◊ remarque : compte tenu de $\bar{v} = \dot{s}$ on peut écrire :

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$ avec : $\bar{a}_T = \ddot{s} = \dot{\bar{v}}$ et $a_N = \frac{v^2}{R}$.

2. Description géométrique

• La méthode précédente peut aussi être exprimée de façon géométrique.

Dans un premier temps, on détermine la tangente à la courbe ; c'est la droite la plus proche possible de la courbe au voisinage du point M considéré.

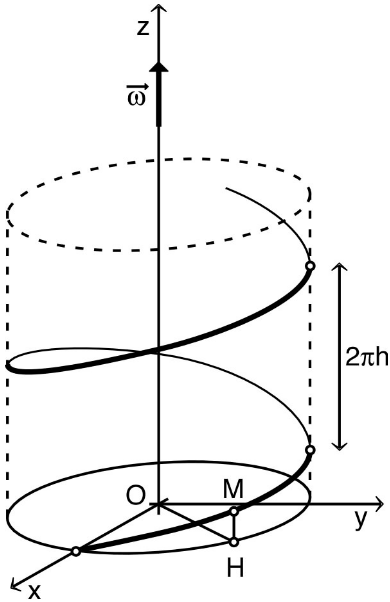
Pour décrire la courbure, on peut ensuite chercher le cercle le plus proche de la courbe au voisinage de M : si la courbure n'est pas nulle, la tangente en M et un point M' voisin définissent un cercle, la limite pour $M' \rightarrow M$ est le “cercle osculateur” de la courbe en M .

Le rayon du cercle osculateur est le rayon de courbure (pour le point M considéré) et son centre est le centre instantané de rotation.

3. Exemple du mouvement hélicoïdal

• On considère un mouvement hélicoïdal de "pas" $2\pi\, h$ constant, sur un cylindre de rayon r :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r(\theta) + z\,\vec{u}_z \ ;$$
$$\theta = \theta(t) \quad \text{et} \quad z = h\,\theta(t) \ .$$



• La vitesse et l'accélération sont :

$$\vec{v} = r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + h\,\dot{\theta}\,\vec{u}_z \ ;$$
$$\vec{a} = r\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - r\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + h\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_z \ .$$

• Avec les notations de Frénet :

$$ds = \sqrt{r^2 + h^2}\,d\theta \ ;$$
$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{\dot{s}} = \frac{r\,\vec{u}_\theta + h\,\vec{u}_z}{\sqrt{r^2+h^2}} \ .$$

Pour un très petit angle :

$$\vec{T}_0 = \frac{r\,\vec{u}_y + h\,\vec{u}_z}{\sqrt{r^2+h^2}} \ ;$$
$$\vec{T}\cdot\vec{T}_0 \approx \cos(\alpha) \approx \frac{r^2\ \cos(\theta) + h^2}{r^2+h^2} \ ;$$
$$1 - \frac{\alpha^2}{2} \approx \frac{r^2}{r^2+h^2}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \frac{h^2}{r^2+h^2} \ ;$$
$$\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\,\theta \ ; \ R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{r^2+h^2}{r} > r \ .$$

Enfin : $\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{d\alpha} = -\vec{u}_r$ (vers l'axe).

• On obtient ainsi (en notant $\Omega = \dot{\alpha}$ la vitesse angulaire autour du centre instantané de rotation) :

$$\vec{v} = R\,\Omega\,\vec{T} \ ; \ \vec{a} = R\,\dot{\Omega}\,\vec{T} + R\,\Omega^2\,\vec{N} \ .$$

◊ remarque : la notion de courbure se généralise aux surfaces, mais de plusieurs façons ; dans ce cas particulier on peut dire que par certains aspects la courbure du cylindre est nulle selon Oz et $\frac{1}{r}$ selon Oxy , puis que la courbure $\frac{1}{R}$ de l'hélice est intermédiaire, mais il n'y a pas de contrainte théorique générale.