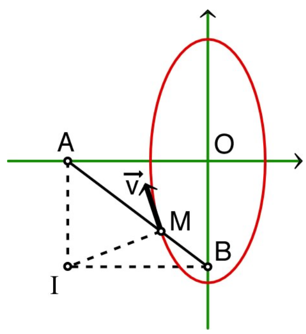
# TRIÈDRE DE FRÉNET - corrigé des exercices

## I. Centre instantané de rotation

1. • Les coordonnées de $A$ peuvent s'écrire $(x_A\ ;\ 0)$ . Par ailleurs, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont $(b\ \cos(\phi)\ ;\ b\ \sin(\phi))$ . Les coordonnées du point $M$ sont donc : $(x_A + b\ \cos(\phi)\ ;\ b\ \sin(\phi))$ .
• De même pour les coordonnées de $B$ : $(x_A + \ell\ \cos(\phi)\ ;\ \ell\ \sin(\phi))$ ; mais $B$ doit rester sur l'axe $Oy$ et ses coordonnées sont de la forme $(0\,;y_B)$ . Par conséquent : $x_A = -\ell\ \cos(\phi)$ et on peut écrire les coordonnées du point $M$ : $\big((b-\ell)\ \cos(\phi)\ ;\ b\ \sin(\phi)\big)$ .
• Ceci correspond à une trajectoire elliptique, d'axes $Ox$ et $Oy$ , de demi-diamètre horizontal $\ell - b$ et de demi-diamètre vertical $b$ . L'équation de cette trajectoire peut s'écrire : $\frac{x^2}{(\ell-b)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
◊ remarque : si on n'étudie que l'aspect cinématique, on ne sait pas de quelle façon (en fonction du temps) est parcourue cette trajectoire.

2. • Les coordonnées du vecteur vitesse peuvent s'obtenir symboliquement en dérivant par rapport à $t$ :
$$v_x = \dot{x} = (\ell - b)\ \dot{\phi}\ \sin(\phi)\ \ ;\ \ v_y = \dot{y} = b\ \dot{\phi}\ \cos(\phi)\ .$$
◊ remarque : ceci ne détermine pas la façon dont est parcourue la trajectoire car on ne connaît pas $\phi(t)$ .
• D'après l'énoncé, $I$ a pour coordonnées :
$$(x_A\,;y_B) = (-\ell\ \cos(\phi)\ ;\ \ell\ \sin(\phi))\ ;$$
donc $OI = AB = \ell$ et $I$ décrit un cercle de centre $O$ et de rayon $\ell$ .




• Le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées : $(b\ \cos(\phi)\ ;\ (b-\ell)\ \sin(\phi))$ et l'orthogonalité au vecteur vitesse se déduit du produit scalaire :
$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{IM} = b.[(\ell - b) + (b - \ell)]\ \dot{\phi}\ \cos(\phi)\ \sin(\phi) = 0\ .$$
• D'après les coordonnées :
$$IM = \sqrt{b^2\ \cos^2(\phi) + (b-\ell)^2\ \sin^2(\phi)} \quad \text{et} \quad v = |\dot{\phi}|\ \sqrt{(\ell-b)^2\ \sin^2(\phi) + b^2\ \cos^2(\phi)} = |\dot{\phi}|\ IM\ .$$
◊ remarque : avec $\vec{\omega} = \dot{\phi}\,\vec{u}_z$ (vecteur rotation perpendiculaire au plan) on peut écrire : $\vec{v} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IM}$ ; cela découle du fait que tout déplacement peut être décomposé en une rotation autour d'un axe instantané de rotation et une translation parallèle à cet axe ; or ici la translation est nulle puisque le mouvement reste dans le plan, or $I$ est le centre instantané de rotation (intersection de l'axe orthogonal au plan avec celui ci) ; en effet : une rotation qui donne à $A$ un mouvement parallèle à $Ox$ a forcément son centre instantané sur la perpendiculaire en $A$ à $Ox$ (rayon perpendiculaire à la tangente) ; de même pour $B$ , d'où la position de $I$ ; on retrouve alors que $\vec{v}$ est perpendiculaire au rayon (instantané) $IM$ .