A.C. IV - CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIEL

1. Transformation du vecteur vitesse

• On cherche à décrire, par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$, un mouvement supposé connu par rapport à un autre référentiel $\mathcal{R}'$.

Le changement de référentiel peut avoir plusieurs utilités :
- ◊ un observateur ayant effectué une expérience peut connaître la façon dont un autre observateur a vu cette même expérience ;
- ◊ on peut simplifier l'étude d'un mouvement complexe en le décomposant en une combinaison de plusieurs mouvements simples.

• On peut écrire par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + x'\,\vec{u}'_x + y'\,\vec{u}'_y + z'\,\vec{u}'_z \;;$$

$$\vec{v}(M) = \dot{\overrightarrow{OM}} = \left[\dot{\overrightarrow{OO'}} + x'\,\dot{\vec{u}}'_x + y'\,\dot{\vec{u}}'_y + z'\,\dot{\vec{u}}'_z\right] + \left[\dot{x}'\,\vec{u}'_x + \dot{y}'\,\vec{u}'_y + \dot{z}'\,\vec{u}'_z\right] .$$

Ceci peut s'écrire : $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}'$ avec :

$\vec{v}_e = \dot{\overrightarrow{OO'}} + x'\,\dot{\vec{u}}'_x + y'\,\dot{\vec{u}}'_y + z'\,\dot{\vec{u}}'_z$ "vitesse d'entraînement" ;

$\vec{v}' = \dot{x}'\,\vec{u}'_x + \dot{y}'\,\vec{u}'_y + \dot{z}'\,\vec{u}'_z$ "vitesse relative" (par rapport à $\mathcal{R}'$).

• La vitesse d'entraînement est la vitesse par rapport à $\mathcal{R}$ du point fixe de $\mathcal{R}'$ qui coïncide avec M a l'instant considéré ("point coïncidant").

Elle peut s'écrire : $\vec{v}_e = \vec{v}(O') + \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{O'M}$ avec :

$\vec{v}(O') = \dot{\overrightarrow{OO'}}$ (translation de O') ;

$\vec{\omega}_e \times \overrightarrow{O'M} = x'\,\dot{\vec{u}}'_x + y'\,\dot{\vec{u}}'_y + z'\,\dot{\vec{u}}'_z$ (rotation autour de O').

◊ remarque : la rotation temporelle de tout vecteur de norme constante, en particulier des vecteurs unitaires, correspond à $\dot{\vec{u}}'_i = \vec{\omega}_e \times \vec{u}'_i$.

◊ remarque : si nécessaire, on peut ensuite exprimer $(\vec{u}'_x \,;\, \vec{u}'_y \,;\, \vec{u}'_z)$ en fonction de $(\vec{u}_x \,;\, \vec{u}_y \,;\, \vec{u}_z)$.

2. Transformation du vecteur accélération

• D'une façon analogue, par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\vec{v}(M) = \dot{\overrightarrow{OM}} = \left[\dot{\overrightarrow{OO'}} + x'\,\dot{\vec{u}}'_x + y'\,\dot{\vec{u}}'_y + z'\,\dot{\vec{u}}'_z\right] + \left[\dot{x}'\,\vec{u}'_x + \dot{y}'\,\vec{u}'_y + \dot{z}'\,\vec{u}'_z\right] \;;$$

$$\vec{a}(M) = \ddot{\overrightarrow{OM}} = \left[\ddot{\overrightarrow{OO'}} + x'\,\ddot{\vec{u}}'_x + y'\,\ddot{\vec{u}}'_y + z'\,\ddot{\vec{u}}'_z\right] \cdots$$

$$\cdots + \left[\ddot{x}'\,\vec{u}'_x + \ddot{y}'\,\vec{u}'_y + \ddot{z}'\,\vec{u}'_z\right] + 2\left[\dot{x}'\,\dot{\vec{u}}'_x + \dot{y}'\,\dot{\vec{u}}'_y + \dot{z}'\,\dot{\vec{u}}'_z\right] .$$

Ceci peut s'écrire : $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}' + \vec{a}_c$ avec :

$\vec{a}_e = \ddot{\overrightarrow{OO'}} + x'\,\ddot{\vec{u}}'_x + y'\,\ddot{\vec{u}}'_y + z'\,\ddot{\vec{u}}'_z$ accélération d'entraînement ;

$\vec{a}' = \ddot{x}'\,\vec{u}'_x + \ddot{y}'\,\vec{u}'_y + \ddot{z}'\,\vec{u}'_z$ accélération relative (par rapport à $\mathcal{R}'$) ;

$\vec{a}_c = 2\left[\dot{x}'\,\dot{\vec{u}}'_x + \dot{y}'\,\dot{\vec{u}}'_y + \dot{z}'\,\dot{\vec{u}}'_z\right]$ accélération "complémentaire".

• L'accélération d'entraînement est l'accélération par rapport à $\mathcal{R}$ du "point coïncidant".

Elle peut s'écrire : $\vec{a}_e = \vec{a}(O') + \left[\dot{\vec{\omega}}_e \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_e \times \left(\vec{\omega}_e \times \overrightarrow{O'M}\right)\right]$ avec :

$\vec{a}(O') = \ddot{\overrightarrow{OO'}}$ (translation de O') ;

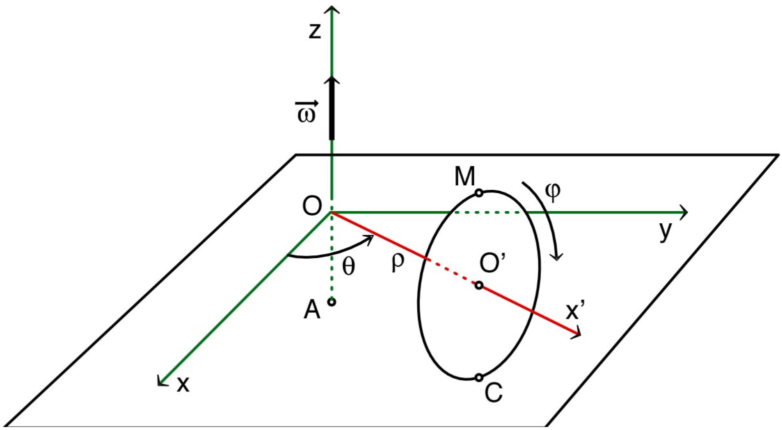
$\dot{\vec{\omega}}_e \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_e \times \left(\vec{\omega}_e \times \overrightarrow{O'M}\right) = x'\,\ddot{\vec{u}}'_x + y'\,\ddot{\vec{u}}'_y + z'\,\ddot{\vec{u}}'_z$ (rotation).

• L'accélération complémentaire (ou accélération "de Coriolis") peut s'écrire :

$\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega}_e \times \vec{v}'$.

3. Exemple de mouvement composé

• On considère une roue de rayon R et d'axe OO' horizontal ; cette roue roule sans glisser sur un plan horizontal ; OO' (de longueur ρ) tourne autour de l'axe Az à la vitesse angulaire constante $\omega = \dot{\theta}$.



• On cherche, à un instant t , pour le point M qui passe en haut de la roue :
  ◊ les normes v et a par rapport au référentiel lié au plan ;
  ◊ l'angle α de $\vec{a}$ par rapport au plan.

• On peut utiliser le référentiel intermédiaire $\mathcal{R}'$ en rotation à la vitesse $\vec{\omega}$ autour de l'axe Oz (ce n'est pas une translation circulaire).

Le point O' est immobile dans $\mathcal{R}'$ et la vitesse relative de M (en rotation autour de OO') est : $\vec{v}'(M) = R\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi = R\,\dot{\varphi}\,\vec{u}'_y$.

• L'immobilité du point de contact C par rapport à $\mathcal{R}$ (C ne glisse pas) donne : $\vec{v}(C) = \vec{v}_e(C) + \vec{v}'(C) = \vec{0}$.

De plus pour la roue $\vec{v}'(C) = -\vec{v}'(M)$ donc $\vec{v}_e(M) = \vec{v}_e(O') = \vec{v}_e(C) = \vec{v}'(M)$; en norme, cela correspond à $\rho\,\omega = R\,\dot{\varphi}$.

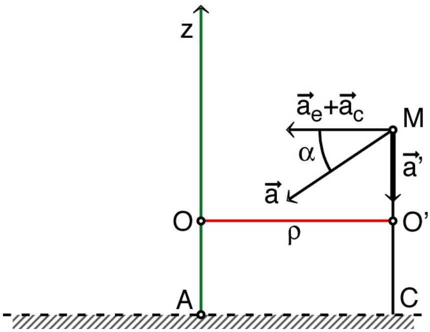
Au total : $\vec{v}(M) = \vec{v}_e(M) + \vec{v}'(M)$ donne $v = 2\,\rho\,\omega$.

• L'accélération relative est : $\vec{a}' = \dot{\varphi}^2\, \overrightarrow{MO'}$ donc $a' = R\,\dot{\varphi}^2 = \frac{\rho^2\,\omega^2}{R}$.

L'accélération d'entraînement est : $\vec{a}_e(M) = \vec{a}_e(O') = \omega^2\, \overrightarrow{O'O}$ (perpendiculaire à $\vec{a}'$).

L'accélération complémentaire $\vec{a}_c(M) = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'(M)$ est parallèle et de même sens que $\vec{a}_e$ et a pour norme : $a_c = 2\,\omega\, v' = 2\,\rho\,\omega^2$.

Au total (dans le plan $Ox'z$) : $a = \sqrt{(a_e + a_c)^2 + a'^2} = \rho\,\omega^2 \sqrt{9 + \frac{\rho^2}{R^2}}$.



Par ailleurs, l'angle α de $\vec{a}$ avec l'horizontale est tel que :

$$\tan(\alpha) = \frac{a'}{a_e + a_c} = \frac{\rho}{3\,R} .$$

🕮 *exercices n° I, II, III et IV.*