CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIEL - corrigé des exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Trajectoires de mouvements composés

• Par rapport au repère Oxy le mouvement du point M peut être décrit par les équations paramétriques cartésiennes : $x = 0$ et $y = \frac{1}{2}\, a_0\, t^2$ (en intégrant deux fois $\ddot{y} = a_0$ avec $\dot{y}(0) = 0$ et $y(0) = 0$).

• L'équation de la trajectoire est alors obtenue en éliminant t entre ces deux équations : $x = 0$ (la trajectoire est l'axe Oy).

• Par rapport au référentiel d'un observateur qui parcourt l'axe Ox à vitesse constante v_0 , on peut utiliser un repère $O'x'y'$ où seule l'origine diffère, avec $x(O') = v_0\, t$ (en posant $t = 0$ lors du passage à l'origine) et $y(O') = 0$. Les coordonnées de M sont ainsi : $x' = -v_0\, t$ et $y' = \frac{1}{2}\, a_0\, t^2$.

• L'équation de la trajectoire est obtenue en éliminant t entre ces deux équations : $y' = \frac{a_0}{2\, v_0^2}\, x'^2$ (la trajectoire est une parabole dont l'axe est Oy).

II. Trajectoires de mouvements composés

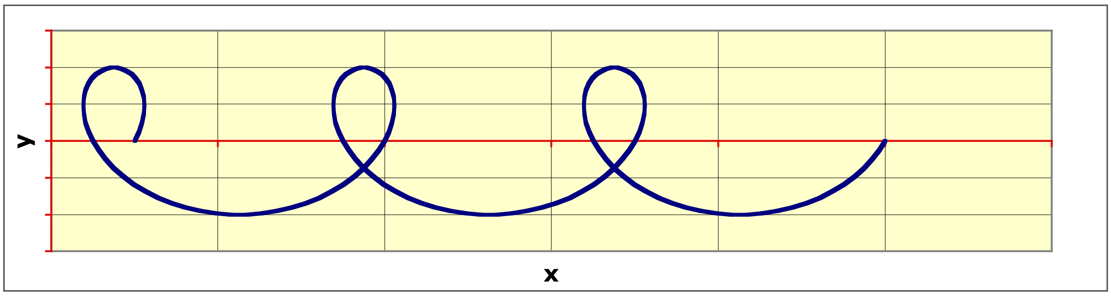
• Par rapport à $O'x'y'$ les équations paramétriques sont : $x' = R\, \cos(\omega\, t)$ et $y' = R\, \sin(\omega\, t)$ si on suppose que OM est dans la direction et le sens de Ox à $t = 0$. Par rapport à Oxy on obtient par conséquent : $x = v_0\, t + R\, \cos(\omega\, t)$ et $y = R\, \sin(\omega\, t)$.

• La courbe obtenue, du type cycloïde, peut prendre trois allures différentes selon les valeurs relatives de v_0 et $R\, \omega$; cela peut se comprendre en considérant les coordonnées de la vitesse :

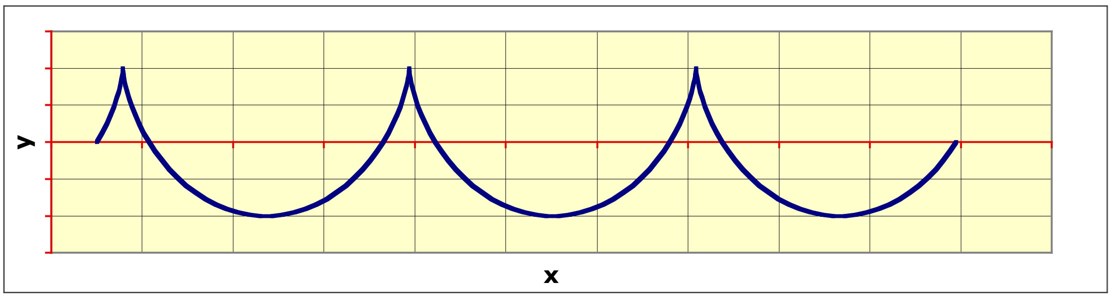
$\dot{x} = v_0 - R\, \omega\, \sin(\omega\, t)$ et $\dot{y} = R\, \omega\, \cos(\omega\, t)$.

• On constate en effet que la coordonnée verticale de la vitesse s'annule pour $\omega\, t = \frac{\pi}{2}\ [\mathrm{mod}\ \pi]$ et on obtient alors : $\dot{x} = v_0 - R\, \omega$ ce qui met en évidence les trois cas :

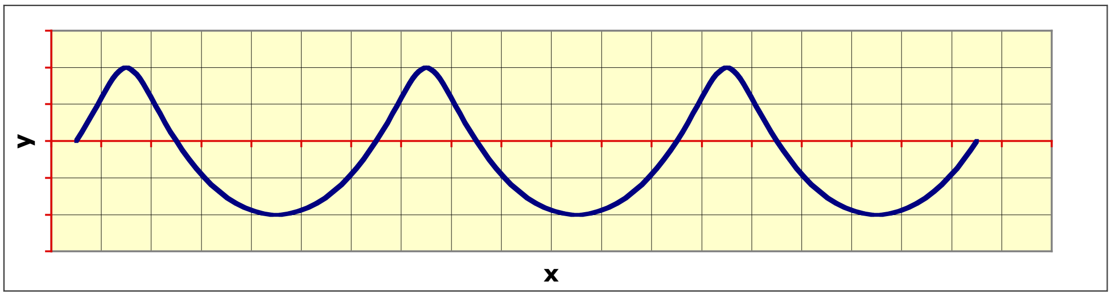
◊ si $v_0 < R\, \omega$ alors $\dot{x} < 0$ et il y a une "boucle" (M "revient en arrière") :



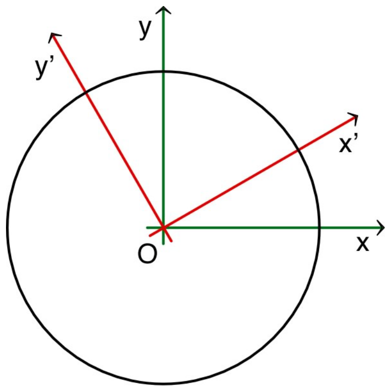
◊ si $v_0 = R\, \omega$ alors $\dot{x} = 0$ et il y a un point de rebroussement (M s'arrête puis repart, mais toujours vers les $x > 0$) :



◊ si $v_0 > R\,\omega$ alors $\dot{x} > 0$ et la courbe est “simplement sinueuse” :



III. Référentiel en rotation



1.a. • D'après la symétrie du problème, on choisit les origines O et O' confondues au centre. On peut ensuite calculer dans le plan, en coordonnées cartésiennes ou polaires.

• Par rapport à $\mathcal{R}'$, un mouvement rectiligne uniforme suivant Ox' peut être décrit par les équations paramétriques en coordonnées cartésiennes : $x' = v'\,t$ et $y' = 0$ ou bien polaires : $r' = v'\,t$ et $\theta' = 0$.
• En éliminant le temps entre ces deux équations, on obtient l'équation cartésienne de la trajectoire : $y' = 0$ ou l'équation polaire : $\theta' = 0$.

1.b. • Pour exprimer ce mouvement par rapport à $\mathcal{R}$, on peut écrire en coordonnées cartésiennes :
$\overrightarrow{OM} = x'\,\vec{u}'_x + y'\,\vec{u}'_y = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y$;
$\vec{u}'_x = \cos(\theta)\,\vec{u}_x + \sin(\theta)\,\vec{u}_y$ et $\vec{u}'_y = -\sin(\theta)\,\vec{u}_x + \cos(\theta)\,\vec{u}_y$ (avec $\theta = \omega\,t$) ;
$x = x'\,\cos(\theta) - y'\,\sin(\theta)$ et $y = x'\,\sin(\theta) + y'\,\cos(\theta)$.
• On en déduit alors les équations paramétriques cartésiennes : $x = v'\,t\,\cos(\omega\,t)$ et $y = v'\,t\,\sin(\omega\,t)$ (ce qui peut se deviner car c'est un cas simple). L'équation correspondante de la trajectoire est par contre impossible à exprimer simplement ainsi car expliciter t avec ces équations n'est pas direct...
• Si on utilise les coordonnées polaires, la transformation peut se traduire simplement sans forcément expliciter le lien complet entre la base $(\vec{u}_r\,,\vec{u}_\theta)$ et la base $(\vec{u}'_r\,,\vec{u}'_\theta)$, car cette transformation ne porte ici que sur des vecteurs d'origine O (ou O') pour lesquels il n'y a qu'une composante radiale (par contre il faut relier θ et θ' , mais c'est plus facile que pour les vecteurs de base $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}'_\theta$). On obtient ainsi : $r = r'$ et $\theta = \theta' + \omega\,t$, d'où les équations paramétriques polaires : $r = v'\,t$ et $\theta = \omega\,t$.
• L'équation correspondante de la trajectoire est dans ce cas : $r = \frac{v'}{\omega}\,\theta$ (c'est une spirale).
◊ remarque : on peut écrire $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{v'}{\omega}\,\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ mais l'utilisation est peu pratique.

2.a. • On peut calculer les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse en dérivant les équations paramétriques cartésiennes : $v_x = \dot{x} = v'\,\cos(\omega\,t) - \omega\,v'\,t\,\sin(\omega\,t)$; $v_y = \dot{y} = v'\,\sin(\omega\,t) + \omega\,v'\,t\,\cos(\omega\,t)$.
◊ remarque : ceci correspond à la norme : $v = v'\,\sqrt{1 + \omega^2\,t^2}$.
• On peut aussi calculer les coordonnées polaires du vecteur vitesse à partir des équations paramétriques polaires, mais il ne suffit pas de dériver les coordonnées car les vecteurs de base polaires varient : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\vec{u}}_r = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = v'\,\vec{u}_r + r\,\omega\,\vec{u}_\theta$. Mais par ailleurs $r = v'\,t$ donc $\vec{v} = v'\,\vec{u}_r + v'\,\omega\,t\,\vec{u}_\theta$ c'est-à-dire : $v_r = \dot{r} = v'$ et $v_\theta = r\,\dot{\theta} = v'\,\omega\,t$.
◊ remarque : étant donné que M reste sur l'axe $O'x'$, il se trouve (cas particulier) que $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ sont respectivement égaux à $\vec{u}'_x$ et $\vec{u}'_y$.

2.b. • On peut calculer les coordonnées cartésiennes de la vitesse par composition des mouvements ; par rapport à $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + x'\,\vec{u}'_x + y'\,\vec{u}'_y$; $\vec{v} = \left[\dot{\overrightarrow{OO'}} + x'\,\dot{\vec{u}}'_x + y'\,\dot{\vec{u}}'_y\right] + \left[\dot{x}'\,\vec{u}'_x + \dot{y}'\,\vec{u}'_y\right]$.

• Ceci peut s'écrire : $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}'$ où $\vec{v}' = \dot{x}'\,\vec{u}'_x + \dot{y}'\,\vec{u}'_y$ est la vitesse par rapport à $\mathcal{R}'$ (“relative”) et où $\vec{v}_e = \dot{\overrightarrow{OO'}} + x'\,\dot{\vec{u}}'_x + y'\,\dot{\vec{u}}'_y = \dot{\overrightarrow{OO'}} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}$ est appelée “vitesse d'entraînement”.

• Les coordonnées cartésiennes de la vitesse par rapport à $\mathcal{R}'$ sont : $v'_{x'} = v'$ et $v'_{y'} = 0$ (d'où le choix par l'énoncé de la notation v').

• Les coordonnées de la vitesse d'entraînement sur la base $(\vec{u}'_x\,,\vec{u}'_y)$ sont : $v_{ex'} = -\dot{\theta}\,y' = 0$ et $v_{ey'} = \dot{\theta}\,x' = \omega\,v'\,t$. Les coordonnées cartésiennes de la vitesse <u>par rapport à</u> $\mathcal{R}$, exprimées <u>sur la base</u> $(\vec{u}'_x\,,\vec{u}'_y)$ <u>associée à</u> $\mathcal{R}'$, sont donc : $v_{x'} = v'_{x'} + v_{ex'} = v'$ et $v_{y'} = v'_{y'} + v_{ey'} = \omega\,v'\,t$.

◊ remarque : étant donné que M reste sur l'axe $O'x'$, il se trouve (cas particulier) que $\vec{u}'_x$ et $\vec{u}'_y$ sont respectivement égaux à $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.

• Finalement, le changement de base cartésien :

$$\vec{u}'_x = \cos(\theta)\ \vec{u}_x + \sin(\theta)\ \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{u}'_y = -\sin(\theta)\ \vec{u}_x + \cos(\theta)\ \vec{u}_y$$

donne (de même que pour le passage de (x',y') à (x,y)) :

$$v_x = v_{x'}\ \cos(\theta) - v_{y'}\ \sin(\theta) \quad \text{et} \quad v_y = v_{x'}\ \sin(\theta) + v_{y'}\ \cos(\theta)$$

d'où on retrouve : $v_x = v'\ \cos(\omega\,t) - \omega\,v'\,t\ \sin(\omega\,t)$ et $v_y = v'\ \sin(\omega\,t) + \omega\,v'\,t\ \cos(\omega\,t)$.

• On peut calculer les coordonnées polaires du vecteur vitesse par composition des mouvements, mais le calcul général est compliqué. En simplifiant dans le cas où O' est confondu avec O et où les bases $(\vec{u}_r\,,\vec{u}_\theta)$ et $(\vec{u}'_r\,,\vec{u}'_\theta)$ sont donc identiques : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\vec{u}}_r = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ peut s'interpréter avec une vitesse par rapport à $\mathcal{R}'$: $\vec{v}' = \dot{r}\,\vec{u}_r = v'\,\vec{u}_r$ et une vitesse d'entraînement : $\vec{v}_e = r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$. On retrouve alors : $v_r = \dot{r} = v'$ et $v_\theta = r\,\dot{\theta} = \omega\,v'\,t$.

◊ remarque : ceci montre que l'opportunité du choix des coordonnées cartésiennes ou polaires dépend non seulement du système étudié, mais aussi de la question traitée : le mieux est de passer des unes aux autres en fonction des besoins.

3.a. • On peut calculer les coordonnées cartésiennes du vecteur accélération en dérivant les équations paramétriques cartésiennes :

$$a_x = \ddot{x} = -2\,\omega\,v'\ \sin(\omega\,t) - \omega^2\,v'\,t\ \cos(\omega\,t)\ ;\quad a_y = \ddot{y} = 2\,\omega\,v'\ \cos(\omega\,t) - \omega^2\,v'\,t\ \sin(\omega\,t)\ .$$

◊ remarque : ceci correspond à la norme : $a = \omega\,v'\,\sqrt{4 + \omega^2\,t^2}$.

• On peut aussi calculer les coordonnées polaires du vecteur accélération à partir des équations paramétriques polaires, mais il ne s'agit pas d'une simple dérivation des coordonnées car les vecteurs de base polaires varient lors du mouvement : $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ d'où :

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{u}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{u}}_r + \left(\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\dot{\vec{u}}_\theta\ ;$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta = -r\,\omega^2\,\vec{u}_r + 2\,v'\,\omega\,\vec{u}_\theta\ ;$$

mais $r = v'\,t$ donc $a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 = -v'\,t\,\omega^2$; $a_\theta = 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta} = 2\,v'\,\omega$.

3.b. • On peut calculer les coordonnées cartésiennes du vecteur accélération en utilisant la composition des mouvements :

◊ par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\vec{v} = \left[\dot{\overrightarrow{OO'}} + x'\,\dot{\vec{u}}'_x + y'\,\dot{\vec{u}}'_y\right] + \left[\dot{x}'\,\vec{u}'_x + \dot{y}'\,\vec{u}'_y\right]\ ;$$

$$\vec{a}(M) = \dot{\vec{v}} = \left[\ddot{\overrightarrow{OO'}} + x'\,\ddot{\vec{u}}'_x + y'\,\ddot{\vec{u}}'_y\right] + \left[\ddot{x}'\,\vec{u}'_x + \ddot{y}'\,\vec{u}'_y\right] + 2\left[\dot{x}'\,\dot{\vec{u}}'_x + \dot{y}'\,\dot{\vec{u}}'_y\right]\ .$$

◊ ceci peut s'écrire : $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ avec :

$\vec{a}' = \ddot{x}'\,\vec{u}'_x + \ddot{y}'\,\vec{u}'_y$ accélération par rapport à $\mathcal{R}'$;

$\vec{a}_e = \ddot{\overrightarrow{OO'}} + x'\,\ddot{\vec{u}}'_x + y'\,\ddot{\vec{u}}'_y = \ddot{\overrightarrow{OO'}} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}\right)$ accélération d'entraînement ;

$\vec{a}_c = 2\left[\dot{x}'\,\dot{\vec{u}}'_x + \dot{y}'\,\dot{\vec{u}}'_y\right] = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$ accélération “complémentaire”.

• Sur la base $(\vec{u}'_x\,,\vec{u}'_y)$ les coordonnées cartésiennes sont :

$a'_{x'} = 0$ et $a'_{y'} = 0$ pour l'accélération par rapport à $\mathcal{R}'$;

$a_{ex'} = -\dot{\theta}^2\,x' = -\omega^2\,v'\,t$ et $a_{ey'} = -\dot{\theta}^2\,y' = 0$ pour l'accélération d'entraînement ;

$a_{cx'} = -2\,\dot{\theta}\,v'_{y'} = 0$ et $a_{y'} = 2\,\dot{\theta}\,v'_{x'} = 2\,\omega\,v'$ pour l'accélération complémentaire.

• Les coordonnées cartésiennes de l'accélération <u>par rapport à</u> $\mathcal{R}$, exprimées <u>avec la base</u> $(\vec{u}'_x\,,\vec{u}'_y)$ <u>associée à</u> $\mathcal{R}'$, sont donc : $a_{x'} = a'_{x'} + a_{ex'} + a_{cx'} = -\omega^2\,v'\,t$ et $a_{y'} = a'_{y'} + a_{ey'} + a_{cy'} = 2\,\omega\,v'$.

• Finalement, le changement de base cartésien :

$\vec{u}'_x = \cos(\theta)\ \vec{u}_x + \sin(\theta)\ \vec{u}_y$ et $\vec{u}'_y = -\sin(\theta)\ \vec{u}_x + \cos(\theta)\ \vec{u}_y$

donne (de même que pour le passage de (x', y') à (x, y)) :

$a_x = a_{x'}\ \cos(\theta) - a_{y'}\ \sin(\theta)$ et $a_y = a_{x'}\ \sin(\theta) + a_{y'}\ \cos(\theta)$

d'où on retrouve :

$a_x = -2\ \omega\ v'\ \sin(\omega\ t) - \omega^2\ v'\ t\ \cos(\omega\ t)$ et $a_y = 2\ \omega\ v'\ \cos(\omega\ t) - \omega^2\ v'\ t\ \sin(\omega\ t)$.

• On peut calculer les coordonnées polaires du vecteur accélération en utilisant la composition des mouvements, mais le calcul est en général plus que compliqué. En simplifiant dans le cas où O' est confondu avec O et où les bases $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(\vec{u}'_r, \vec{u}'_\theta)$ sont donc identiques : $\vec{v} = \dot{r}\ \vec{u}_r + r\ \dot{\theta}\ \vec{u}_\theta$ et l'accélération $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\ \dot{\theta}^2\right) \vec{u}_r + \left(2\ \dot{r}\ \dot{\theta} + r\ \ddot{\theta}\right) \vec{u}_\theta = -r\ \omega^2\ \vec{u}_r + 2\ v'\ \omega\ \vec{u}_\theta$ peut s'interpréter avec une accélération par rapport à $\mathcal{R}'$: $\vec{a}' = \vec{0}$; une accélération d'entraînement : $\vec{a}_e = -r\ \dot{\theta}^2\ \vec{u}_r$; une accélération complémentaire : $\vec{a}_c = 2\ \dot{r}\ \dot{\theta}\ \vec{u}_\theta$. On retrouve : $a_r = -r\ \dot{\theta}^2 = -v'\ t\ \omega^2$ et $a_\theta = 2\ \dot{r}\ \dot{\theta} = 2\ v'\ \omega$.

IV. Référentiel en rotation

1. • D'après la symétrie du problème, on peut calculer dans le plan en coordonnées cartésiennes (les coordonnées polaires semblent peu appropriées car O' diffère de O).

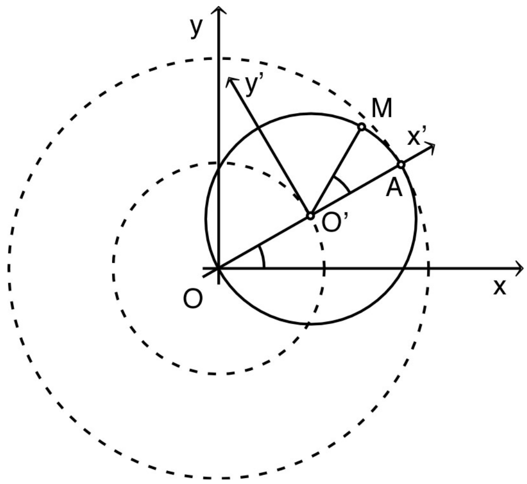
• Par rapport à $\mathcal{R}'$, le mouvement circulaire uniforme de rayon R peut être décrit par les équations paramétriques en coordonnées cartésiennes : $x' = R\ \cos(\omega\ t)$ et $y' = R\ \sin(\omega\ t)$.

• Par rapport à $\mathcal{R}$:

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \left[R\ \cos(\omega\ t)\ \vec{u}_x + R\ \sin(\omega\ t)\ \vec{u}_y\right] + \left(x'\ \vec{u}'_x + y'\ \vec{u}'_y\right) = x\ \vec{u}_x + y\ \vec{u}_y$;

$\vec{u}'_x = \cos(\theta)\ \vec{u}_x + \sin(\theta)\ \vec{u}_y$ et $\vec{u}'_y = -\sin(\theta)\ \vec{u}_x + \cos(\theta)\ \vec{u}_y$ (avec $\theta = \omega\ t$) ;

$x = R\ .\left[\cos(\omega\ t) + \cos(2\ \omega\ t)\right]$ et $y = R\ .\left[\sin(\omega\ t) + \sin(2\ \omega\ t)\right]$.



• On peut calculer les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse par rapport à $\mathcal{R}$ en dérivant les équations paramétriques :

$v_x = \dot{x} = -R\ \omega\ .\left[\sin(\omega\ t) + 2\ \sin(2\ \omega\ t)\right]$ et $v_y = \dot{y} = R\ \omega\ .\left[\cos(\omega\ t) + 2\ \cos(2\ \omega\ t)\right]$.

• De façon analogue pour le vecteur accélération par rapport à $\mathcal{R}$ en dérivant à nouveau :

$a_x = \ddot{x} = -R\ \omega^2\ .\left[\cos(\omega\ t) + 4\ \cos(2\ \omega\ t)\right]$ et $a_y = \ddot{y} = -R\ \omega^2\ .\left[\sin(\omega\ t) + 4\ \sin(2\ \omega\ t)\right]$.

2. • On peut calculer les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse par rapport à $\mathcal{R}'$ en dérivant les équations paramétriques : $v'_{x'} = \dot{x}' = -R\ \omega\ \sin(\omega\ t)$ et $v'_{y'} = \dot{y}' = R\ \omega\ \cos(\omega\ t)$.

• On peut calculer les coordonnées cartésiennes du vecteur accélération par rapport à $\mathcal{R}'$ en dérivant à nouveau : $a'_{x'} = \ddot{x}' = -R\ \omega^2\ \cos(\omega\ t)$ et $a'_{y'} = \ddot{y}' = -R\ \omega^2\ \sin(\omega\ t)$.

3. • On peut calculer les coordonnées du vecteur vitesse par rapport à $\mathcal{R}$ par composition des mouvements ; d'après : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + x'\ \vec{u}'_x + y'\ \vec{u}'_y$ on déduit :

$\vec{v} = \left[\dot{\overrightarrow{OO'}} + x'\ \dot{\vec{u}}'_x + y'\ \dot{\vec{u}}'_y\right] + \left[\dot{x}'\ \vec{u}'_x + \dot{y}'\ \vec{u}'_y\right]$.

• Ceci peut s'écrire : $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}'$ où $\vec{v}' = \dot{x}'\,\vec{u}'_x + \dot{y}'\,\vec{u}'_y$ est la vitesse par rapport à $\mathcal{R}'$ ("relative") et où $\vec{v}_e = \dot{\overrightarrow{OO'}} + x'\,\dot{\vec{u}}'_x + y'\,\dot{\vec{u}}'_y = \dot{\overrightarrow{OO'}} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}$ est appelée "vitesse d'entraînement".

• Pour calculer par exemple les coordonnées de la vitesse d'entraînement sur la base $(\vec{u}'_x\,,\vec{u}'_y)$ on peut utiliser : $\overrightarrow{OO'} = R\,\vec{u}'_x$ d'où $\dot{\overrightarrow{OO'}} = R\,\dot{\vec{u}}'_x = R\,\vec{\omega} \times \vec{u}'_x = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OO'}$ (car $\overrightarrow{OO'}$ est fixe par rapport à $\mathcal{R}'$) et donc au total : $\vec{v}_e = \dot{\overrightarrow{OO'}} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}$.

• D'après les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à $\mathcal{R}'$: $(R + x'\,;\ y')$ (différentes de x' et y' car ces dernières se réfèrent à l'origine O'), on obtient :

$$v_{ex'} = -\omega\,y' = -R\,\omega\,\sin(\omega\,t) \quad \text{et} \quad v_{ey'} = \omega\,.(R + x') = R\,\omega\,.[1 + \cos(\omega\,t)]\ .$$

• Les coordonnées cartésiennes de la vitesse <u>par rapport à</u> $\mathcal{R}$, exprimées <u>sur la base</u> $(\vec{u}'_x\,,\vec{u}'_y)$ <u>associée à</u> $\mathcal{R}'$, sont donc : $v_{x'} = v'_{x'} + v_{ex'} = -2\,R\,\omega\,\sin(\omega\,t)$ et $v_{y'} = v'_{y'} + v_{ey'} = R\,\omega\,.[1 + 2\,\cos(\omega\,t)]$.

• Finalement, le changement de base cartésien :

$$\vec{u}'_x = \cos(\theta)\,\vec{u}_x + \sin(\theta)\,\vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{u}'_y = -\sin(\theta)\,\vec{u}_x + \cos(\theta)\,\vec{u}_y$$

donne (de même que pour le passage de (x', y') à (x, y)) :

$$v_x = v_{x'}\,\cos(\theta) - v_{y'}\,\sin(\theta) \quad \text{et} \quad v_y = v_{x'}\,\sin(\theta) + v_{y'}\,\cos(\theta)$$

d'où on retrouve : $v_x = -R\,\omega\,.[\sin(\omega\,t) + 2\,\sin(2\,\omega\,t)]$ et $v_y = R\,\omega\,.[\cos(\omega\,t) + 2\,\cos(2\,\omega\,t)]$.

<u>B. EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT</u>

V. <u>Vecteur "rotation d'entraînement" instantané</u>

• D'après les définitions des repères orthonormés, les coordonnées de $\dot{\vec{u}}'_x$ sur la base $(\vec{u}'_x\,,\vec{u}'_y\,,\vec{u}'_z)$ sont respectivement : $\dot{\vec{u}}'_x \cdot \vec{u}'_x$; $\dot{\vec{u}}'_x \cdot \vec{u}'_y$; $\dot{\vec{u}}'_x \cdot \vec{u}'_z$; c'est-à-dire :

$$\dot{\vec{u}}'_x = [\dot{\vec{u}}'_x \cdot \vec{u}'_x]\,\vec{u}'_x + [\dot{\vec{u}}'_x \cdot \vec{u}'_y]\,\vec{u}'_y + [\dot{\vec{u}}'_x \cdot \vec{u}'_z]\,\vec{u}'_z\ .$$

• Mais la dérivation de $\|\,\vec{u}'_x\,\|^2 = 1$ donne : $\dot{\vec{u}}'_x \cdot \vec{u}'_x = 0$ donc $\dot{\vec{u}}'_x = [\dot{\vec{u}}'_x \cdot \vec{u}'_y]\,\vec{u}'_y + [\dot{\vec{u}}'_x \cdot \vec{u}'_z]\,\vec{u}'_z$.

• D'après les définitions de $\vec{\omega}$ et du produit vectoriel :

$$\vec{\omega} \times \vec{u}'_x = [\dot{\vec{u}}'_y \cdot \vec{u}'_z]\,\vec{u}'_x \times \vec{u}'_x + [\dot{\vec{u}}'_z \cdot \vec{u}'_x]\,\vec{u}'_y \times \vec{u}'_x + [\dot{\vec{u}}'_x \cdot \vec{u}'_y]\,\vec{u}'_z \times \vec{u}'_x\ ;$$

$$\vec{\omega} \times \vec{u}'_x = [\dot{\vec{u}}'_x \cdot \vec{u}'_y]\,\vec{u}'_y - [\dot{\vec{u}}'_z \cdot \vec{u}'_x]\,\vec{u}'_z\ .$$

• Mais la dérivation de $\vec{u}'_x \cdot \vec{u}'_z = 0$ conduit à : $\dot{\vec{u}}'_x \cdot \vec{u}'_z = -\dot{\vec{u}}'_z \cdot \vec{u}'_x$ donc :

$$\vec{\omega} \times \vec{u}'_x = [\dot{\vec{u}}'_x \cdot \vec{u}'_y]\,\vec{u}'_y + [\dot{\vec{u}}'_x \cdot \vec{u}'_z]\,\vec{u}'_z = \dot{\vec{u}}'_x\ .$$

et de même pour $\dot{\vec{u}}'_y$ et $\dot{\vec{u}}'_z$.

• Pour un vecteur quelconque <u>constant par rapport à</u> $\mathcal{R}'$: $\vec{W} = W_x\,\vec{u}'_x + W_y\,\vec{u}'_y + W_z\,\vec{u}'_z$, on peut développer de la même façon la dérivée (par rapport à $\mathcal{R}$) et le produit vectoriel :

$$\dot{\vec{W}} = W_x\,\dot{\vec{u}}'_x + W_y\,\dot{\vec{u}}'_y + W_z\,\dot{\vec{u}}'_z \quad \text{et} \quad \vec{\omega} \times \vec{W} = W_x\,\vec{\omega} \times \vec{u}'_x + W_y\,\vec{\omega} \times \vec{u}'_y + W_z\,\vec{\omega} \times \vec{u}'_z$$

et la conclusion découle donc de celle obtenue pour les vecteurs de base.