CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIEL - exercices

A. EXERCICES DE BASE

I. Trajectoires de mouvements composés

• Le plan étant rapporté à un repère Oxy orthonormé, on considère un point M , initialement immobile en O puis décrivant l'axe Oy avec une accélération constante a_0 . Quelle est sa trajectoire pour un observateur parcourant l'axe Ox avec une vitesse constante v_0 ?

II. Trajectoires de mouvements composés

• Le plan étant rapporté à un repère Oxy orthonormé, on considère un point O' qui décrit l'axe Ox avec une vitesse constante v_0 . On lui associe un repère $O'x'y'$ avec $O'x'$ et Ox confondus.

• Un point M décrit un cercle de centre O' et de rayon R à la vitesse angulaire constante ω .

• Déterminer les équations paramétriques (c'est à dire en fonction de t) pour la trajectoire de M par rapport au référentiel associé à Oxy , puis tracer l'allure de la trajectoire correspondante dans les trois cas : $v_0 < \omega R$; $v_0 = \omega R$; $v_0 > \omega R$.

III. Référentiel en rotation

• Un manège tourne à une vitesse angulaire constante $\omega > 0$. Un homme ramasse les tickets : en partant du centre à $t = 0$, il suit un rayon de la plate-forme avec un mouvement de vitesse constante v' (par rapport au manège).

1. • Établir les équations paramétriques de la trajectoire (c'est à dire en fonction de t), puis l'équation de la trajectoire (en éliminant le temps) :
   a) dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au manège ;
   b) dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au sol.
   ◊ indication : les coordonnées polaires peuvent simplifier certains calculs intermédiaires.

2. • Exprimer la vitesse du mouvement de l'homme par rapport à $\mathcal{R}$:
   a) à partir des équations paramétriques dans $\mathcal{R}$;
   b) par composition des mouvements (interpréter chaque terme).

3. • Exprimer l'accélération du mouvement de l'homme par rapport à $\mathcal{R}$:
   a) à partir des équations paramétriques dans $\mathcal{R}$;
   b) par composition des mouvements (interpréter chaque terme).

IV. Référentiel en rotation

• Dans le plan Oxy , un cercle de diamètre OA et de centre O' tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de l'origine O . On associe à son centre O' un repère orthogonal $O'x'y'$ dont l'axe $O'x'$ est suivant OA . À l'instant $t = 0$ le point A est sur Ox (qui est donc confondu avec $O'x'$).

• Un point M , initialement en A , parcourt en outre la circonférence dans le sens positif avec la même vitesse angulaire ω .

1. • Calculer les coordonnées de la vitesse et de l'accélération de M dans le référentiel $\mathcal{R}$ associé à Oxy .

2. • Calculer les coordonnées de la vitesse et de l'accélération de M dans le référentiel $\mathcal{R}'$ associé à $O'x'y'$.

3. • Retrouver les résultats de la question (1) en utilisant la composition des mouvements.

B. EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

V. Vecteur "rotation d'entraînement" instantané

• Soient un repère $\left(O\,,\,\vec{u}_x\,,\,\vec{u}_y\,,\,\vec{u}_z\right)$ associé à un référentiel $\mathcal{R}$ et un repère $\left(O'\,,\,\vec{u}'_x\,,\,\vec{u}'_y\,,\,\vec{u}'_z\right)$ associé à un référentiel $\mathcal{R}'$ en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$. Les vecteurs fixes de $\mathcal{R}'$ étant inchangés par translation, on étudie le changement de référentiel en le considérant comme une translation de l'origine combinée à une rotation de la base de vecteurs.

• En dérivant les relations du type : $\|\,\vec{u}'_x\,\|^2 = 1$ et $\vec{u}'_x \cdot \vec{u}'_y = 0$, vérifier que le vecteur défini par : $\vec{\omega} = \left[\dot{\vec{u}}'_y \cdot \vec{u}'_z\right] \vec{u}'_x + \left[\dot{\vec{u}}'_z \cdot \vec{u}'_x\right] \vec{u}'_y + \left[\dot{\vec{u}}'_x \cdot \vec{u}'_y\right] \vec{u}'_z$ est tel que dans $\mathcal{R}$: $\dot{\vec{u}}'_x = \vec{\omega} \times \vec{u}'_x$ et de même pour $\dot{\vec{u}}'_y$ et $\dot{\vec{u}}'_z$.

• En déduire que de même dans $\mathcal{R}$: $\dot{\vec{W}} = \vec{\omega} \times \vec{W}$ pour tout vecteur $\vec{W} = W_x\,\vec{u}'_x + W_y\,\vec{u}'_y + W_z\,\vec{u}'_z$ <u>constant</u> dans $\mathcal{R}'$.

◊ remarque : le vecteur $\vec{\omega}$ est appelé "vecteur rotation d'entraînement" de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$; il n'est généralement pas constant.