AC. III - COORDONNÉES CYLINDRIQUES ET SPHÉRIQUES

1. Coordonnées cylindriques

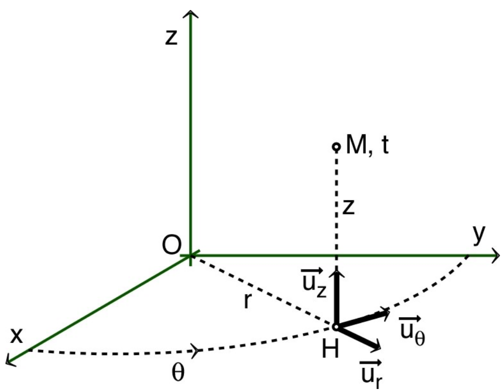
1.1. Description générale

• Pour définir des coordonnées cylindriques, on choisit un “axe cylindrique”, par exemple (Oz) , puis on repère le point H projeté orthogonal de M sur le plan passant par O et orthogonal à (Oz) . Dans ce plan, on repère H par ses coordonnées polaires, ce qui repère M par ses coordonnées $(r\ ,\ \theta\ ,\ z)$.

• Les vecteurs sont alors exprimés selon la base $(\vec{u}_r\ ,\vec{u}_\theta\ ,\vec{u}_z)$ **dépendant du point** M :

$$\vec{u}_r = \vec{u}_r(\theta) = \cos(\theta)\ \vec{u}_x + \sin(\theta)\ \vec{u}_y\ \ ;$$
$$\vec{u}_\theta = \vec{u}_\theta(\theta) = -\sin(\theta)\ \vec{u}_x + \cos(\theta)\ \vec{u}_y\ .$$

Ces vecteurs unitaires sont définis de façon “standard” : selon la direction et le sens des déplacements de M résultant des augmentations respectives de r , θ et z .



On constate alors que :

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta\ \ ;\ \ \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r\ .$$

◊ remarque : contrairement aux coordonnées sphériques, ici le vecteur $\vec{u}_r$ est selon $\overrightarrow{OH}$.

• Avec ces notations :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z\ \ ;$$
$$\vec{v} = \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z\ \ ;$$
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\,\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z\ .$$

◊ remarque : on constate entre autres que (contrairement aux repères cartésiens) les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont différentes des coordonnées de M ; en particulier, $\overrightarrow{OM}$ peut sembler ne dépendre que des deux coordonnées r et z , mais il dépend de θ par la direction de $\vec{u}_r$ (il faut trois coordonnées).

◊ remarque : il s'agit de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ par rapport à $\left(O\,,\vec{u}_x\,,\vec{u}_y\,,\vec{u}_z\right)$, réexprimés sur la base $(\vec{u}_r\,,\vec{u}_\theta\,,\vec{u}_z)$ (sinon il n'y aurait pas les termes de rotation en $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$).

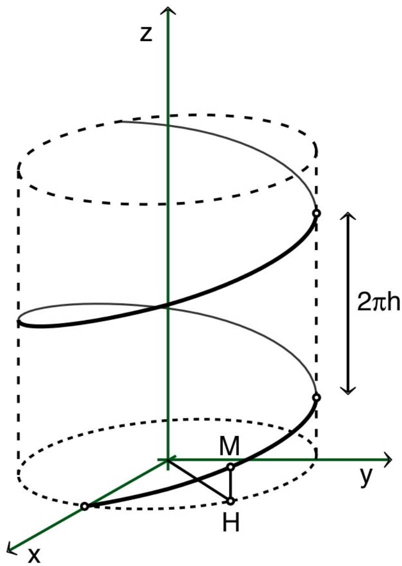
1.2. Mouvement hélicoïdal

• On considère le mouvement hélicoïdal d'un point M sur un cylindre de rayon r :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z$$

avec $z(t) = h\,\theta(t)$ et $h = Cste$ (le “pas” de l'hélice est $2\pi\,h$).

D'après la symétrie, le plus simple est d'utiliser des coordonnées cylindriques.



• La vitesse est alors :

$$\vec{v} = r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + h\,\dot{\theta}\,\vec{u}_z \ ;$$

$$\bar{v} = \rho\,\dot{\theta} \quad \text{avec} \quad \rho = \sqrt{r^2 + h^2} > r \ .$$

D'une façon analogue :

$$\vec{a} = -r\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + r\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + h\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_z \ .$$

◊ remarque : la vitesse $\vec{v}$ fait un angle α constant avec l'axe cylindrique (vecteur $\vec{u}_z$) car : $\cos(\alpha) = \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{u}_z = \frac{h}{\rho}\,\mathrm{sgn}\big(\dot{\theta}\big)$.

🕮 *exercice n° I.*

2. Coordonnées sphériques

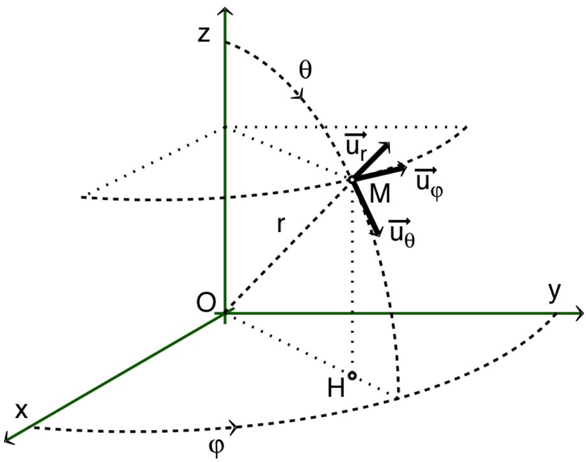
• Pour définir des coordonnées sphériques, on choisit un “axe des pôles”, par exemple (Oz) , puis on repère un “plan méridien” défini par (Oz) et le point M . Dans ce plan, on y repère M par ses coordonnées polaires $(r,\ \theta)$.

Enfin, on choisit un plan contenant (Oz) comme référence des rotations autour de (Oz) ; ceci permet de repérer le plan méridien précédent par un angle φ , ce qui repère M par ses coordonnées $(r,\ \theta, \varphi)$.

• Les vecteurs sont alors exprimés selon la base $(\vec{u}_r\ , \vec{u}_\theta\ , \vec{u}_\varphi)$ **dépendant du point** M . Ces vecteurs unitaires sont définis de façon standard :

$$\vec{u}_r = \vec{u}_r(\theta,\varphi) = \sin(\theta) \,.\, [\cos(\varphi)\ \vec{u}_x + \sin(\varphi)\ \vec{u}_y] + \cos(\theta)\ \vec{u}_z\ \ ;$$
$$\vec{u}_\theta = \vec{u}_\theta(\theta,\varphi) = \cos(\theta) \,.\, [\cos(\varphi)\ \vec{u}_x + \sin(\varphi)\ \vec{u}_y] - \sin(\theta)\ \vec{u}_z\ \ ;$$
$$\vec{u}_\varphi = \vec{u}_\varphi(\varphi) = -\sin(\varphi)\ \vec{u}_x + \cos(\varphi)\ \vec{u}_y\ .$$

◊ remarque : ici r et θ (et de même $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$) n’ont pas la même signification qu'en coordonnées cylindriques ; en particulier θ est limité à $[0\,,\pi]$ et $\vec{u}_r$ est parallèle à $\overrightarrow{OM}$.



• On constate alors que :

$\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta} = \vec{u}_\theta$ et $\frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{u}_r$ (semblable aux coordonnées polaires) ;

$\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \varphi} = \sin(\theta)\ \vec{u}_\varphi$ et $\frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \varphi} = \cos(\theta)\ \vec{u}_\varphi$

(seules les projections sur (Oxy) dépendent de φ) ;

$\frac{\partial \vec{u}_\varphi}{\partial \varphi} = \vec{u}_z \times \vec{u}_\varphi = -\cos(\varphi)\ \vec{u}_x - \sin(\varphi)\ \vec{u}_y = -\sin(\theta)\ \vec{u}_r - \cos(\theta)\ \vec{u}_\theta$.

☞ remarque : de façon générale, la dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à un angle de rotation est le produit vectoriel du vecteur unitaire de l'axe de rotation par le vecteur unitaire qu'on dérive.

• On obtient ainsi :

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\vec{u}}_r = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\ \sin(\theta)\ \dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi$.

◊ remarque : on constate ici encore que les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont différentes des coordonnées de M ; en particulier, $\overrightarrow{OM}$ peut sembler ne dépendre que de la coordonnée r , mais il dépend de θ et φ par l’intermédiaire de la direction de $\vec{u}_r$ (il faut trois coordonnées).

◊ remarque : l’expression générale de l’accélération est ici plus compliquée, or elle est en pratique moins utilisée à ce niveau.

🕮 *exercices n° II et III.*