CINÉMATIQUE DES FLUIDES - corrigé des exercices

I. Liquide incompressible en rotation

1. • Chaque “particule” de fluide peut être repérée par un vecteur position $\overrightarrow{OM}(t) = r\,\vec{u}_r\big(\theta(t)\big)$ avec un rayon r constant (dépendant de la particule dont on suit le mouvement) et $\theta(t) = \theta_0 + \Omega\, t$ (θ_0 dépendant de la particule).
 • La vitesse d'une telle particule peut s'écrire : $\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = r\,\frac{d\vec{u}_r}{dt} = r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$, en tenant compte du fait que le $\vec{u}_r$ considéré varie puisque c'est un vecteur de base local, dépendant de l'endroit où se trouve la particule.
 • De façon analogue, l'accélération peut s'écrire : $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r$ (puisque $\dot{\theta} = \Omega = Cste$).

2. • La description eulérienne décrit le mouvement du fluide qui se trouve en un point fixe $\underline{M}$ donné. Ceci conduit à considérer : $\vec{v}(\underline{M}\,,t) = \vec{v}(\underline{M}) = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{O\underline{M}} = r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ indépendant du temps (la base locale est celle en un point fixe).
 • On en déduit ensuite : $\vec{a}(\underline{M}\,,t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{v}$ avec $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ pour une rotation à vitesse constante ; par ailleurs en coordonnées polaires : $\vec{\nabla} = \vec{u}_r\,\frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}$.
 • Ceci donne : $\vec{a}(\underline{M}\,,t) = \vec{a}(\underline{M}) = r\,\dot{\theta}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\big(r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\big) = r\,\dot{\theta}^2\,\frac{\partial\vec{u}_\theta}{\partial\theta} = -r\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r$.
 ◊ remarque : avec la propriété mathématique : $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{v} = \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \big(\vec{\nabla}\times\vec{v}\big)\times\vec{v}$ où en coordonnées cylindriques : $\vec{\nabla}\times\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial v_z}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial(r\,v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\vec{u}_z$ on obtient : $\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{\dot{\theta}^2}{2}\,\vec{\nabla}(r^2) = \frac{\dot{\theta}^2}{2}\,2\,r\,\vec{u}_r = r\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r$ (analogue à l'accélération d'entraînement centrifuge associée à une base locale qui suivrait le fluide) ; $\vec{\nabla}\times\vec{v} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial(r^2\,\dot{\theta})}{\partial r}\,\vec{u}_z = 2\,\dot{\theta}\,\vec{u}_z$; $\big(\vec{\nabla}\times\vec{v}\big)\times\vec{v} = -2\,r\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r$ (analogue à l'accélération complémentaire associée à une base locale qui suivrait le fluide).
 ◊ remarque : la notation du rotationnel avec $\vec{\nabla}\times$ est ambiguë car elle ne correspond à un produit vectoriel usuel qu'en coordonnées cartésiennes ; on peut considérer :
 $\vec{v}(\underline{M}) = -\,y\,\dot{\theta}\,\vec{u}_x + x\,\dot{\theta}\,\vec{u}_y$;
 $\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z = 2\,\dot{\theta}\,\vec{u}_z$;
 $\big(\vec{\nabla}\times\vec{v}\big)\times\vec{v} = -2\,\dot{\theta}^2 .\big(x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y\big)$.

II. Étalement radial d'un liquide incompressible

1. • Chaque “particule” de fluide peut être repérée par $\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\,\vec{u}_r(\theta)$ avec un angle θ constant (dépendant de la particule dont on suit le mouvement). La vitesse (radiale) d'une telle particule peut s'écrire : $\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\;\vec{u}_r$.
 • Le liquide contenu dans un anneau entre r et $r + dr$ a pour volume : $dV = 2\pi\, r\, dr\, e$ (en notant e l'épaisseur). Pour un liquide incompressible à débit $D = \frac{dV}{dt} = 2\pi\, r\, e\, v(r)$ constant, on obtient : $v(r) = \frac{D}{2\pi\, r\, e}$.
 • Mais ceci s'écrit aussi : $2\,r\,dr = \frac{D}{\pi\, e}\,dt$, dont l'intégration donne : $r(t) = \sqrt{r_0^{\,2} + \frac{D}{\pi\, e}\,t}$.
 • De façon analogue, l'accélération peut s'écrire : $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{D}{2\pi\, r^2\, e}\,\dot{r}\,\vec{u}_r = -\frac{D^2}{4\pi^2\, r^3\, e^2}\,\vec{u}_r$, d'où en fonction du temps : $\vec{a}(t) = -\frac{D^2}{4\pi^2\, e^2}\,\frac{1}{\left(r_0^{\,2} + \frac{D}{\pi\, e}\,t\right)^{3/2}}\,\vec{u}_r$.

2. • La description eulérienne décrit le mouvement du fluide qui se trouve en un point fixe $\underline{M}$ donné. Ceci conduit à considérer : $\vec{v}(\underline{M}\,,t) = \vec{v}(\underline{M}) = \frac{D}{2\pi\, r\, e}\,\vec{u}_r$ indépendant du temps (la base locale est celle en un point fixe).

• On en déduit ensuite : $\vec{a}(\underline{M}\,,t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{v}$ avec $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ pour un fluide incompressible à débit constant ; par ailleurs en coordonnées polaires : $\vec{\nabla} = \vec{u}_r\,\frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}$.

• Ceci donne : $\vec{a}(\underline{M}\,,t) = \vec{a}(\underline{M}) = \frac{D}{2\pi\, r\, e}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{D}{2\pi\, r\, e}\,\vec{u}_r\right) = -\frac{D^2}{4\pi^2\, r^3\, e^2}\,\vec{u}_r$.

◊ remarque : avec la propriété mathématique : $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{v} = \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\vec{\nabla}\times\vec{v})\times\vec{v}$ où en coordonnées cylindriques : $\vec{\nabla}\times\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial (r\, v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$ on obtient : $\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{D^2}{4\pi^2\, e^2}\,\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{D^2}{4\pi^2\, r^3\, e^2}\,\vec{u}_r$ (analogue à l'accélération d'entraînement centrifuge associée à une base locale qui suivrait le fluide) ; $\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{0}$; $(\vec{\nabla}\times\vec{v})\times\vec{v} = \vec{0}$ (analogue à l'accélération complémentaire associée à une base locale qui suivrait le fluide).