REPÉRAGE DU MOUVEMENT - corrigé des exercices

I. Équations cartésiennes paramétriques

1. • En dérivant les expressions paramétriques des coordonnées cartésiennes, on obtient les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse : $\dot{x} = 2\,\frac{\lambda}{\tau}\,t$; $\dot{y} = \lambda\,.\left(1 - \frac{t^2}{\tau^2}\right)$; $\dot{z} = \mu\,.\left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right)$.

2. • La norme du vecteur vitesse peut s'écrire : $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ ce qui correspond à :
$$v^2 = (\lambda^2 + \mu^2) + 2\,(\lambda^2 + \mu^2)\,\frac{t^2}{\tau^2} + (\lambda^2 + \mu^2)\,\frac{t^4}{\tau^4} = A\,.\left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right)^2 \quad \text{avec } A = \lambda^2 + \mu^2 = 25{,}0\ \mathrm{m^2.s^{-2}}\,.$$
• Ceci donne : $v = v_0\,.\left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right)$ avec $v_0 = \sqrt{A} = 5{,}0\ \mathrm{m.s^{-1}}$.
• Puisque la norme de la vitesse ne s'annule jamais ($v \geq v_0$), le mouvement est toujours dans le même sens. On peut alors choisir comme sens positif (arbitraire) le sens du mouvement ; ainsi la vitesse algébrique est toujours positive et égale à la norme v calculée précédemment.

3. • L'angle θ de la tangente avec l'axe Oz peut être repéré (par exemple) par : $\cos(\theta) = \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{v} = \frac{\mu}{v_0} = \frac{3}{5}$; cette quantité est visiblement constante.

II. Cycloïde en coordonnées cartésiennes

1. • Lorsque la roue tourne d'un angle θ en roulant vers la droite sans glisser sur l'axe Ox, son pourtour roule d'une longueur $R\,\theta$ et les coordonnées du centre C sont donc $(R\,\theta\ ;\ R)$.
• Le point M de la roue qui était au contact de l'axe (en O) à l'instant initial, était tel que $\overrightarrow{CM}$ était vertical vers le bas. À l'instant t considéré, $\overrightarrow{CM}$ a tourné d'un angle θ dans le sens inverse trigonométrique et ses coordonnées sont $(-R\,\sin(\theta)\ ;\ -R\,\cos(\theta))$.
• Les coordonnées du point M sont donc : $(R\,.[\theta - \sin(\theta)]\ ;\ R\,.[1 - \cos(\theta)])$.

2. • Les coordonnées du vecteur vitesse s'obtiennent en dérivant par rapport à t :
$$v_x = \dot{x} = R\,\dot{\theta}\,.[1 - \cos(\theta)] \ ;\ v_y = \dot{y} = R\,\dot{\theta}\,\sin(\theta)\,.$$
• De même : $a_x = \ddot{x} = R\,\ddot{\theta}\,.[1 - \cos(\theta)] + R\,\dot{\theta}^2\,\sin(\theta)$; $a_y = \ddot{y} = R\,\ddot{\theta}\,\sin(\theta) + R\,\dot{\theta}^2\,\cos(\theta)$.

3. • Aux instants où M touche l'axe Ox (à chaque tour) :
$$\theta = k\,2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{N}\ ;\ x = R\,\theta = k\,2\pi\,R\ ;\ y = 0\,.$$
• Les coordonnées du vecteur vitesse sont alors : $v_x = 0$; $v_y = 0$. Le point s'immobilise au moment du contact puisqu'il ne glisse pas horizontalement et qu'il rebrousse chemin verticalement.
• Les coordonnées de l'accélération sont alors : $a_x = 0$; $a_y = R\,\dot{\theta}^2$. La vitesse horizontale est toujours positive et s'annule à l'instant du contact, donc $a_x < 0$ avant et $a_x > 0$ après ; la continuité impose ainsi $a_x = 0$ au contact. Par contre $a_y > 0$ au contact puisque le point rebrousse chemin verticalement ; plus précisément : a_y ne change pas de signe et ne peut pas s'annuler juste au contact, sinon le point y resterait immobile (il faut qu'il y ait au moins l'un des axes avec une composante de redémarrage).

III. Vecteurs en coordonnées polaires et notion de base locale

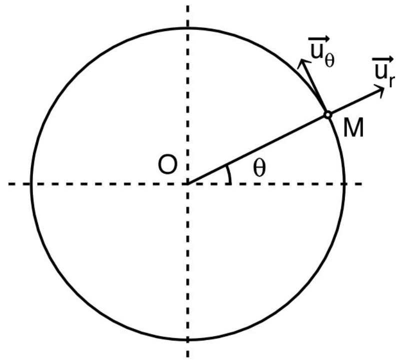
1. • Le vecteur $\overrightarrow{OM_1} = r_1\,\vec{u}_r$ et le vecteur $\overrightarrow{OM_2} = r_2\,\vec{u}_r$ peuvent sembler ne pas dépendre de la coordonnée θ. Qui plus est, il peuvent sembler être obligatoirement de même direction : celle de $\vec{u}_r$ (voire même obligatoirement égaux dans le cas $r_1 = r_2$).

• Cela vient du fait que les coordonnées au point M_1 sont associées à la base polaire en ce point : $(\vec{u}_r(\theta_1)\,;\,\vec{u}_\theta(\theta_1))$ alors que les coordonnées de M_2 sont pour la base locale $(\vec{u}_r(\theta_2)\,;\,\vec{u}_\theta(\theta_2))$. Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ dépendent de θ par la direction de $\vec{u}_r(\theta)$, donc ils n'ont pas forcément la même direction.

2. • Cela n'est pas possible directement car les coordonnées des point M_1 et M_2 sont associées aux bases polaires respectives en ces points. Cela n'est pas simplement possible, pour la même raison, avec les coordonnées de $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$.
• On peut par contre le faire indirectement en changeant de base pour l'un des deux vecteurs ; la base locale en M_2 peut ainsi être écrite :
$\vec{u}_r(\theta_2) = \cos(\theta_2-\theta_1)\,\vec{u}_r(\theta_1) + \sin(\theta_2-\theta_1)\,\vec{u}_\theta(\theta_1)$;
$\vec{u}_\theta(\theta_2) = -\sin(\theta_2-\theta_1)\,\vec{u}_r(\theta_1) + \cos(\theta_2-\theta_1)\,\vec{u}_\theta(\theta_1)$.
• On en déduit ainsi (on pourrait faire de même sur la base locale de M_2) :
$\overrightarrow{OM_1} = r_1\,\vec{u}_r(\theta_1)$; $\overrightarrow{OM_2} = r_2\,\vec{u}_r(\theta_2) = r_2\cos(\theta_2-\theta_1)\,\vec{u}_r(\theta_1) + r_2\sin(\theta_2-\theta_1)\,\vec{u}_\theta(\theta_1)$;
$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = [r_2\cos(\theta_2-\theta_1) - r_1]\,\vec{u}_r(\theta_1) + r_2\sin(\theta_2-\theta_1)\,\vec{u}_\theta(\theta_1)$.
◊ remarque : cela peut laisser subsister un problème concernant le cas particulier où M_1 est à l'origine, mais en exprimant de façon analogue : $\overrightarrow{M_1M_2} = [r_2 - r_1\cos(\theta_2-\theta_1)]\,\vec{u}_r(\theta_2) + r_1\sin(\theta_2-\theta_1)\,\vec{u}_\theta(\theta_2)$, le cas particulier du point $M_1 = O$ de coordonnées $r_0 = 0$ et θ_0 indéterminé redonne l'expression : $\overrightarrow{OM_2} = r_2\,\vec{u}_r(\theta_2)$ indépendante de θ_0.
◊ remarque : l'approfondissement de cette notion de repérage local est l'un des outils utilisés par la relativité générale pour décrire la gravitation.

IV. Coordonnées polaires ; étude d'un mouvement circulaire

1. • La condition $\theta = \frac{\pi}{2}$ correspond à $\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{1}{2}$ ce qui est obtenu la première fois pour $\frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi}{6}$ donc $t = \frac{T}{12} = 83{,}3\ \text{ms}$.



2. • En coordonnées polaires : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$; on en déduit :
$\vec{v} = \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\vec{u}}_r = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$.
Ceci correspond à une composante radiale : $v_r = \dot{r} = 0$ et une composante orthoradiale :
$v_\theta = r\,\dot{\theta} = \frac{2\pi^2 r}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{\pi^2 r\sqrt{3}}{T} = 17{,}1\ \text{m.s}^{-1}$.

3. • De même en dérivant $\vec{v} = r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ on obtient :
$\vec{a} = -r\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + r\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta$.
C'est-à-dire :
$a_r = -r\,\dot{\theta}^2 = -\frac{4\pi^4 r}{T^2}\cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = -\frac{3\pi^4 r}{T^2} = -292\ \text{m.s}^{-2}$ (accélération radiale) ;
$a_\theta = r\,\ddot{\theta} = -\frac{4\pi^3 r}{T^2}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = -\frac{2\pi^3 r}{T^2} = -61{,}9\ \text{m.s}^{-2}$ (accélération orthoradiale).

4. • La norme du vecteur accélération est $a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$, qu'il est mieux d'exprimer en fonction de θ :
$a_r = -\frac{4\pi^4 r}{T^2}\cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = -\frac{4\pi^2 r}{T^2}(\pi^2 - \theta^2)$ et $a_\theta = -\frac{4\pi^3 r}{T^2}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = -\frac{4\pi^2 r}{T^2}\,\theta$;
$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}\sqrt{(\pi^2-\theta^2)^2 + \theta^2}$.
• L'accélération a est extremum quand $\frac{da}{d\theta} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}\,\frac{2\theta\,.\,(\theta^2-\pi^2)+\theta}{\sqrt{(\pi^2-\theta^2)^2+\theta^2}} = 0$, soit : $2\theta\,.\left[(\theta^2-\pi^2) + \frac{1}{2}\right] = 0$,
donc : $\theta = 0$ ou $\theta = \pm\sqrt{\pi^2 - \frac{1}{2}}$.
• En reportant ces valeurs de θ dans l'expression de a, on obtient :
$a = \frac{4\pi^4 r}{T^2}$ (maximum) pour $\theta = 0$;
$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}\sqrt{\pi^2 - \frac{1}{4}}$ (minimum) pour $\theta = \pm\sqrt{\pi^2 - \frac{1}{2}}$.