

REPÉRAGE DU MOUVEMENT - exercices

I. Équations cartésiennes paramétriques

• Par rapport à un repère orthonormé, fixe dans le référentiel considéré, on considère un point mobile M dont la trajectoire (H) est donnée par les équations paramétriques en fonction du temps :

$$x = \frac{\lambda}{\tau} t^2 ; y = \lambda t \cdot \left(1 - \frac{t^2}{3\tau^2}\right) ; z = \mu t \cdot \left(1 + \frac{t^2}{3\tau^2}\right) ;$$

avec : $\lambda = 4,0 \text{ m.s}^{-1}$; $\tau = 1,0 \text{ s}$ et $\mu = 3,0 \text{ m.s}^{-1}$.

1. • Déterminer le vecteur vitesse.
2. • Montrer que sa norme peut s'écrire : $v = v_0 \cdot \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right)$ avec $v_0 = 5,00 \text{ m.s}^{-1}$.
• Déterminer le signe de la vitesse algébrique (c'est-à-dire le sens sur la trajectoire).
3. • Montrer que la tangente à la trajectoire (H) fait un angle constant avec l'axe Oz .

II. Cycloïde en coordonnées cartésiennes

• Une roue de rayon R et de centre C roule sans glisser sur un axe Ox . Le mouvement de la roue est paramétré par l'angle $\theta(t)$ dont a tourné la roue à partir de sa position initiale.

1. • Quelles sont, en fonction de R et de θ , les coordonnées cartésiennes du point M de la périphérie de la roue qui coïncidait avec O pour $\theta = 0$?
♦ remarque : la trajectoire de M est une courbe appelée cycloïde.
2. • Calculer, en fonction de R , de θ et de ses dérivées, les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M .
3. • Calculer les valeurs des composantes des vecteurs vitesse et accélération à l'instant où M touche l'axe Ox . Interpréter les résultats.

III. Vecteurs en coordonnées polaires et notion de base locale

1. • On considère un point M_1 de coordonnées polaires (r_1, θ_1) et un point M_2 de coordonnées polaires (r_2, θ_2) ; exprimer les coordonnées polaires des vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$. Quelle difficulté d'interprétation la comparaison des deux fait-elle apparaître ?
2. • Peut-on calculer directement les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ par simple comparaison des coordonnées de M_1 et M_2 ? Peut-on le faire par simple comparaison des coordonnées de $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$?

IV. Coordonnées polaires ; étude d'un mouvement circulaire

• Un point matériel M se déplace sur un cercle de centre O et de rayon $r = 1,00 \text{ m}$. La position de M est repérée à l'aide de l'angle polaire θ par rapport à la direction initiale $\overrightarrow{OM_0}$. L'équation paramétrique du mouvement est : $\theta = \pi \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ avec $T = 1,00 \text{ s}$.

1. • Au bout de combien de temps le point M passe-t-il pour la première fois en N tel que $\theta = \frac{\pi}{2}$?
2. • Calculer littéralement, puis numériquement, les composantes radiale et orthoradiale du vecteur vitesse en N .

3. • Calculer littéralement, puis numériquement, les composantes radiale et orthoradiale du vecteur accélération en N .
4. • Pour quelle(s) valeur(s) de θ la norme du vecteur accélération est-elle maximale ?