PRINCIPE DE MOINDRE ACTION RELATIVISTE - corrigé des exercices

I. Géométrie riemannienne

1. • Après un déplacement de M jusqu'en $M_2\,(r_1\,;\,\frac{\pi}{2})$, l'expression du vecteur est : $\vec{V} = -\overrightarrow{u_\theta}\,(M_2)$. L'expression du vecteur, pourtant constant, a changé parce que la base $(\overrightarrow{u_r}\,;\overrightarrow{u_\theta})$ a changé. Inversement, un vecteur dont les coordonnées polaires restent constantes n'est pas un vecteur constant.

◊ remarque : cet exemple en coordonnées polaires est un cas particulier qui se généralise en “géométrie riemannienne” ; si on définit une grandeur physique à partir des variations d'une grandeur vectorielle $\vec{V}$, il faut isoler dans les variations dV^i des coordonnées la partie DV^i qui correspond à une variation du vecteur (variation “covariante”) ; la géométrie est décrite par l'intermédiaire de la métrique g_{ij} associée à l'élément de distance, ici : $d\ell^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2$ $(g_{11} = 1\,;\,g_{22} = r^2)$; les variations “covariantes” sont telles que $Dg_{ij} = 0$, facilitant ainsi la manipulation des grandeurs : $(DV)_i = D(V_i) = D(g_{ij}V^j) = g_{ij}DV^j$.

◊ remarque : la relativité générale utilise la géométrie riemannienne avec une métrique $g_{\alpha\beta}$ quadridimensionnelle incluant la description de la gravitation.

2. • Par rapport à l'origine O, on peut considérer $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$ puis avec les notations “usuelles” :

$$\vec{v} = \overrightarrow{OM}^{\bullet} = r^{\bullet}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\overrightarrow{u_r}^{\bullet} = r^{\bullet}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\theta^{\bullet}\,\overrightarrow{u_\theta}\,.$$

• La coordonnée $v_\theta = r\,\theta^{\bullet}$ (sans indice co/contravariant) n'est pas la dérivée $\theta^{\bullet}$ de la coordonnée correspondante de M. La longueur du déplacement associé à $d\theta$ est en effet : $d\ell = r\,d\theta = \sqrt{g_{22}}\,d\theta$.

◊ remarque : en géométrie riemannienne, la base “canonique” n'est généralement pas normée ; par exemple : $\left\|\overrightarrow{e_\theta}\right\| = \sqrt{g_{22}}$; $\overrightarrow{u_\theta} = \dfrac{\overrightarrow{e_\theta}}{\sqrt{g_{22}}}$; $v_\theta = \sqrt{g_{22}}\,v^2$ où $v^2 = \theta^{\bullet}$ désigne la coordonnée contravariante 2 ; les coordonnées covariantes et contravariantes sont de ce fait affectées par des coefficients inverses ; l'interprétation de ces coordonnées dans la définition des grandeurs physiques doit en tenir compte.

3. • Pour un point isolé : $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,m.(r^{\bullet 2} + r^2\,\theta^{\bullet 2})$. L'impulsion “canonique” associée à la coordonnée θ est donc : $p_2 = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^{\bullet}} = mr^2\,\theta^{\bullet}$.

• Avec la méthode de Lagrange, l'impulsion “canonique” associée (quantité covariante) est un moment cinétique : $p_2 = mr^2\,\theta^{\bullet}$; ce n'est pas la coordonnée “usuelle” de l'impulsion : $p_\theta = m\,v_\theta = m\,r\,\theta^{\bullet} = \dfrac{p_2}{\sqrt{g_{22}}}$.

• L'utilisation de telles notations n'a rien d'incohérent ; il faut juste adapter les méthodes “classiques” en conséquence. Il en est de même en particulier pour la méthode de Lagrange en notations covariantes avec la métrique de Minkowski.

II. Formulation quadrivectorielle

1. • Pour le paramètre τ, puisque $\sqrt{U_\beta U^\beta} = c$ peut a priori se simplifier, on obtient les impulsions :

$$p_\alpha = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U^\alpha} = \frac{mc\,U_\alpha}{\sqrt{U_\beta U^\beta}} = mU_\alpha.$$

• Puisque $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0$, on obtient les équations du mouvement : $p_\alpha = mU_\alpha = \text{Cste}$.

2. • Si on cherche une formulation du hamiltonien $\mathcal{H} = p_\alpha \dot{x}^\alpha + \mathcal{L} = mU_\alpha U^\alpha - mc\sqrt{U_\beta U^\beta} = 0$. Cette expression du hamiltonien n'est pas adaptée à la méthode hamiltonienne, mais il est vrai que l'énergie est ici décrite par p_0.

◊ remarque : on obtient des expressions à peine plus adaptées en considérant la limite d'une paramétrisation par $\sigma \neq \tau$ quand $\sigma \to \tau$.

III. Expression de l'action

• Pour une particule massive isolée, l'action peut s'écrire : $\mathcal{S} = -mc\int ds = -mc\int\sqrt{\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}$.

• Ceci donne une variation : $\delta\mathcal{S} = -mc\int\frac{\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha\,\delta(dx^\beta)}{\sqrt{\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}} = -\int mU_\alpha\ d(\delta x^\alpha)$.

• L'intégration par parties donne : $\delta\mathcal{S} = -\Big[mU_\alpha\ \delta x^\alpha\Big] + \int\eta_{\alpha\beta}\frac{d(mU^\alpha)}{d\sigma}\delta x^\beta\,d\sigma$.

• Quand on cherche les équations du mouvement pour des δx^α nuls aux extrémités, le premier terme est nul. Pour des δx^α quelconques durant le mouvement, la condition $\delta\mathcal{S} = 0$ impose les équations du mouvement : $\frac{d(mU^\alpha)}{d\sigma} = 0$.

• Inversement si on étudie une particule respectant les équations du mouvement, mais avec une position finale variable, alors c'est le second terme qui est nul et il reste : $\delta\mathcal{S} = -mU_\alpha\ \delta x^\alpha$.

• Ceci correspond à : $p_\alpha = mU_\alpha = -\partial_\alpha\mathcal{S}$.

• De façon plus générale : $\mathcal{S} = \int\mathcal{L}\ d\sigma$; $\delta\mathcal{S} = \int\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U^\alpha}\delta U^\alpha\right)d\sigma$.

• On peut utiliser : $\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U^\alpha}\ \delta x^\alpha\right] = \int\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U^\alpha}\right)^{\bullet}\delta x^\alpha\ d\sigma + \int\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U^\alpha}(\delta x^\alpha)^{\bullet}\ d\sigma$, avec $(\delta x^\alpha)^{\bullet} = \delta U^\alpha$.

• L'intégration par parties donne : $\delta\mathcal{S} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U^\alpha}\ \delta x^\alpha\right] + \int\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha} + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U^\alpha}\right)^{\bullet}\right)\delta x^\alpha\ d\sigma$.

• Pour une particule respectant les équations d'Euler-Lagrange : $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha} + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U^\alpha}\right)^{\bullet} = 0$, les variations en fonction de la position finale donnent : $\delta\mathcal{S} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U^\alpha}\ \delta x^\alpha$; ainsi : $p_\alpha = -\partial_\alpha\mathcal{S} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U^\alpha}$.

IV. Formulation quadratique

• En décrivant l'action avec un paramètre $\sigma \neq \tau$, il faut respecter la condition : $\mathcal{S} = \int\mathcal{L}'d\sigma = \int\mathcal{L}\,d\tau$.

• Par comparaison : $\mathcal{L}' = -\frac{m}{2}\,U_\alpha U^\alpha = -\frac{m}{2}\,U_\alpha U^\alpha\ \frac{d\sigma}{d\tau}$.

• Avec : $\frac{c^2d\tau^2}{d\sigma^2} = U_\alpha U^\alpha$, ceci donne : $\mathcal{L}' = -\frac{mc}{2}\ \sqrt{U_\alpha U^\alpha}$.

• Puisque le lagrangien n'est quadratique que pour le cas particulier où on paramètre par τ (la limite pour $\sigma \to \tau$ ne redonne pas la même expression), l'utilisation du “lagrangien géodésique” semble assez opportuniste. Il est toutefois efficace et permet de simplifier certains calculs ; en outre il peut même s'adapter pour la relativité générale.

V. Formulation quadrivectorielle

1.a. • L'action peut s'écrire $\mathcal{S}' = \int \mathcal{L}' d\sigma$ avec un lagrangien : $\mathcal{L}' = -mc\sqrt{U_\alpha U^\alpha} + \lambda.\left(\sqrt{U_\alpha U^\alpha} - c\right)$ où λ est un multiplicateur de Lagrange.

1.b. • Les impulsions généralisées sont : $p_\alpha = -\dfrac{\partial \mathcal{L}'}{\partial U^\alpha} = (mc - \lambda)\ \dfrac{U_\alpha}{\sqrt{U_\beta U^\beta}} = (m - \dfrac{\lambda}{c})\ \mathrm{U}_\alpha$.

1.c. • Puisque $\mathcal{L}'$ ne dépend pas des x^α, les équations du mouvement donnent : $(mc - \lambda)\ \mathrm{U}_\alpha = \mathrm{Cste}$.

1.d. • Les équations du mouvement donnent en principe dans ce cas $U^\alpha(\sigma, \lambda)$. En reportant dans l'équation de contrainte, on peut en déduire $\lambda(\sigma)$; mais τ n'apparaît explicitement ni dans l'équation de contrainte, ni dans les équations du mouvement, donc $\lambda = \mathrm{Cste}$.

◊ remarque : compte tenu de $\sqrt{U_\alpha U^\alpha} = c$, on peut écrire $(mc - \lambda(\sigma))\ U_\alpha(\sigma) = (mc - \lambda(0))\ U_\alpha(0)$ mais aussi $(mc - \lambda(\sigma))^2 = (mc - \lambda(0))^2$.

• L'équation obtenue n'impose aucune autre contrainte sur λ, hormis le fait d'être une constante ; rien n'interdit donc de choisir la solution $\lambda = 0$.

1.e. • Les équations du mouvement peuvent s'écrire : $U_\alpha = \mathrm{U}_\alpha = \mathrm{Cste}$ (ou si on préfère $m\mathrm{U}_\alpha = \mathrm{Cste}$).

2. • L'action peut s'écrire avec un lagrangien : $\mathcal{L}' = -mc\sqrt{U_\alpha U^\alpha} + \lambda.\left(U_\alpha U^\alpha - c^2\right)$.

• Les impulsions généralisées sont : $p_\alpha = -\dfrac{\partial \mathcal{L}'}{\partial U^\alpha} = mc\ \dfrac{U_\alpha}{\sqrt{U_\beta U^\beta}} - 2\lambda\ U_\alpha = m\mathrm{U}_\alpha - 2\lambda\ U_\alpha$.

• Puisque $\mathcal{L}'$ ne dépend pas des x^α, les équations du mouvement donnent : $m\mathrm{U}_\alpha - 2\lambda\ U_\alpha = \mathrm{Cste}$.

• La contrainte impose $\sigma = \tau$ et $U_\alpha = \mathrm{U}_\alpha$. Puisque τ n'apparaît explicitement ni dans l'équation de contrainte, ni dans les équations du mouvement, donc $\lambda = \mathrm{Cste}$.

◊ remarque : on obtient $(m - 2\lambda(\sigma))^2 = (m - 2\lambda(0))^2$.

• L'équation obtenue n'impose aucune autre contrainte sur λ, hormis le fait d'être une constante ; rien n'interdit donc de choisir la solution $\lambda = 0$.

• Les équations du mouvement peuvent s'écrire de même : $U_\alpha = \mathrm{U}_\alpha = \mathrm{Cste}$. Ceci suggère que de même une expression quadratique du lagrangien de base serait aussi efficace, tout en étant plus simple pour certains calculs.

3. • L'action peut s'écrire avec un lagrangien : $\mathcal{L}' = -\dfrac{mc}{2}\ U_\alpha U^\alpha + \lambda.\left(U_\alpha U^\alpha - c^2\right)$.

• Les impulsions généralisées sont : $p_\alpha = -\dfrac{\partial \mathcal{L}'}{\partial U^\alpha} = (m - \dfrac{2\lambda}{c})\ U_\alpha$.

• Puisque $\mathcal{L}'$ ne dépend pas des x^α, les équations du mouvement donnent : $(mc - 2\lambda)\ U_\alpha = \mathrm{Cste}$.

• Puisque τ n'apparaît explicitement ni dans l'équation de contrainte, ni dans les équations du mouvement, donc $\lambda = \mathrm{Cste}$.

◊ remarque : on obtient $(mc - 2\lambda(\sigma))^2 = (mc - 2\lambda(0))^2$.

• L'équation obtenue n'impose aucune autre contrainte sur λ, hormis le fait d'être une constante ; rien n'interdit donc de choisir la solution $\lambda = 0$.

• Les équations du mouvement peuvent s'écrire de même : $U_\alpha = \mathrm{U}_\alpha = \mathrm{Cste}$. Ceci justifie que, de même, une expression quadratique “opportuniste” du lagrangien de base est aussi efficace, tout en étant plus simple pour certains calculs (ce “lagrangien géodésique” peut même s'adapter à la relativité générale).

VI. Forces électromagnétiques

1. • On utilise le lagrangien : $\mathcal{L} = -\frac{mc}{2}\, U_\alpha U^\alpha - q\, A_\alpha U^\alpha$.

• Les impulsions généralisées sont : $P_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U^\alpha} = mU_\alpha + q\, A_\alpha = p_\alpha + q\, A_\alpha$.

• D'après les relations d'Euler-Lagrange, les équations du mouvement sont donc :

$$\frac{dP_\alpha}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = q\, U^\beta\, \partial_\alpha A_\beta.$$

• Par ailleurs $\frac{dP_\alpha}{d\tau} = \frac{dp_\alpha}{d\tau} + q\frac{dA_\alpha}{d\tau}$; en outre $\frac{dA_\alpha}{d\tau} = \partial_\beta A_\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau}$ puisque $A^\alpha(x^\beta)$ ne dépend pas explicitement de τ.

• Finalement les équations du mouvement peuvent s'écrire : $\frac{dp_\alpha}{d\tau} = q\, U^\beta\, F_{\alpha\beta}$ avec un champ électromagnétique $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$.

2. • La quadri-impulsion généralisée $P^\alpha = mU^\alpha + q\, A^\alpha$ (correspondant à $\vec{P} = \vec{p} + q\vec{A}$), donne le hamiltonien (exprimé en fonction de l'impulsion généralisée) : $\mathcal{H} = P_\alpha U^\alpha + \mathcal{L} = \frac{1}{2m}(P_\alpha - q\, A_\alpha)(P^\alpha - q\, A^\alpha)$.

• Les équations du mouvement peuvent s'écrire sous forme hamiltonienne :

$$\frac{dP_\alpha}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\alpha} = \frac{q}{m}(P_\beta - q\, A_\beta)(\partial_\alpha A^\beta) = q\, U^\beta\, (\partial_\alpha A_\beta).$$

• Par ailleurs $\frac{dP_\alpha}{d\tau} = \frac{dp_\alpha}{d\tau} + q\frac{dA_\alpha}{d\tau}$; or $\frac{dA_\alpha}{d\tau} = \partial_\beta A_\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau}$ puisque $A^\alpha(x^\beta)$ ne dépend pas explicitement de τ.

• Ainsi : $\frac{dp_\alpha}{d\tau} = q\, U^\beta\, F_{\alpha\beta}$ avec un champ électromagnétique $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$.

VII. Description d'un photon

• On considère l'action : $\mathcal{S} = -mc\int ds = -mc\int\sqrt{U_\alpha U^\alpha}\, d\sigma$ avec le lagrangien : $\mathcal{L} = -mc\sqrt{U_\alpha U^\alpha}$.

• La limite : $\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \rightarrow \frac{h\nu}{c^2}$ utilise $\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{\frac{ds^2}{c^2\, dt^2}}$.

• Elle peut être obtenue en considérant : $mc \rightarrow \frac{h\nu}{c^2}\sqrt{\frac{ds^2}{dt^2}} = \frac{h\nu}{c^2}\sqrt{U_\alpha U^\alpha}\,\frac{d\sigma}{dt}$.

• Ceci donne forcément un lagrangien quadratique :

$$\mathcal{S} = -\frac{h\nu}{c^2}\int U_\alpha U^\alpha \frac{d\sigma}{dt}\, d\sigma = -\frac{h\nu}{c^2}\int V_\alpha V^\alpha\, dt \quad \text{avec } V^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}.$$

◊ remarque : ceci donne bien les équations du mouvement, mais on doit multiplier par $\frac{1}{2}$ pour obtenir l'expression usuelle de l'énergie-impulsion.