PRINCIPE DE MOINDRE ACTION RELATIVISTE - exercices

I. Géométrie riemannienne

1. • On étudie le mouvement d'un point M en coordonnées polaires $(r\ ;\ \theta)$ dans un plan. En une position $M_1\ (r_1\ ;\ 0)$ on définit une grandeur physique décrite par un vecteur $\vec{V} = \vec{u_r}\,(M_1)$.

• Après un déplacement de M jusqu'en une position $M_2\ (r_1\ ;\ \frac{\pi}{2})$, la grandeur physique étudiée n'a pas changé : elle est décrite par le même vecteur $\vec{V}$. Donner l'expression du vecteur en M_2 et commenter.

2. • Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M en coordonnées polaires. Commenter la relation entre la coordonnée v_θ et la dérivée $\theta^\bullet = \frac{d\theta}{dt}$.

3. • Pour un point isolé, on utilise : $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\, m\, v^2$. En déduire l'impulsion “canonique” associée à la coordonnée θ. Commenter.

II. Formulation quadrivectorielle

• Pour une particule massive, la paramétrisation par τ en notant $x^{\alpha\bullet} = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = U^\alpha$, avec un “lagrangien” $\mathcal{L}\,(\{x^\alpha\}, \{x^{\alpha\bullet}\}, \tau) = -mc\sqrt{U_\alpha U^\alpha}$ et $\mathcal{S} = -mc\int\sqrt{U_\alpha U^\alpha}\, d\tau$, est une écriture formelle puisque $\sqrt{U_\alpha U^\alpha} = c$.

1. • Établir les équations du mouvement avec ces notations.

2. • Étudier les équations du mouvement par la méthode de Hamilton avec ces notations.

III. Expression de l'action

• Pour une particule massive isolée, l’action peut s’écrire : $\mathcal{S} = -mc\int ds = -mc\int\sqrt{\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}$.

• Au lieu de considérer les variations de l'action en faisant varier la trajectoire avec des bornes $\{x^\alpha\}_{ini}$ et $\{x^\alpha\}_{fin}$ fixées, ce qui conduit aux équations du mouvement, on considère ici une particule vérifiant les équations du mouvement et on étudie $\mathcal{S}(x^\alpha)$ en faisant varier $\{x^\alpha\}_{fin}$.

• Déterminer dans ces conditions $\delta\mathcal{S}$ en fonction de δx^α considéré comme variation de $\{x^\alpha\}_{fin}$.

• En déduire les dérivées $\partial_\alpha\mathcal{S}$; commenter.

IV. Formulation quadratique

• On se propose d'étudier le mouvement d'une particule matérielle en décrivant l'action avec un paramètre $\sigma \neq \tau$: $\mathcal{S} = \int \mathcal{L}'\, d\sigma$.

• Sachant qu'on raisonne par comparaison au lagrangien quadratique : $\mathcal{L} = -\frac{m}{2}\, U_\alpha U^\alpha$ où $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$, exprimer le lagrangien $\mathcal{L}'$ correspondant à $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\sigma}$. Commenter.

V. Formulation quadrivectorielle

• Pour une particule massive, la paramétrisation par τ avec un “lagrangien” $\mathcal{L}(\{x^\alpha\}, \{x^{\alpha\bullet}\}, \tau)$, en notant $x^{\alpha\bullet} = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = U^\alpha$, $\mathcal{L} = -mc\sqrt{U_\alpha U^\alpha}$ et $\mathcal{S} = -mc\int\sqrt{U_\alpha U^\alpha}\,d\tau$, est une écriture formelle puisque $\sqrt{U_\alpha U^\alpha} = c$.

• La difficulté vient du fait que, indépendamment du mouvement, le paramètre τ n'est pas indépendant des x^α.

• On peut préférer utiliser un autre paramètre $\sigma \neq \tau$, en notant $x^{\alpha\bullet} = \frac{dx^\alpha}{d\sigma} = U^\alpha$, $\mathcal{L} = -mc\sqrt{U_\alpha U^\alpha}$ et $\mathcal{S} = -mc\int\sqrt{U_\alpha U^\alpha}\,d\sigma$. La faisabilité du passage à la limite peut être testée en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour imposer la contrainte $\sqrt{U_\alpha U^\alpha} = c$ (et donc $\sigma = \tau$).

1. a) Écrire le Lagrangien $\mathcal{L}'$ et l'action $\mathcal{S}'$ correspondants.
   b) Exprimer les impulsions généralisées p_α correspondantes.
   c) Établir avec ces notations les équations du mouvement donnant : $x^\alpha(\sigma, \lambda)$ et $U^\alpha(\sigma, \lambda)$.
   d) Reporter dans l'expression des contraintes pour en déduire $\lambda(\sigma)$.
   e) Reporter dans les équations du mouvement pour pouvoir obtenir : $x^\alpha(\sigma)$ et $U^\alpha(\sigma)$.

2. • Reprendre les calculs précédents en utilisant la contrainte $U_\alpha U^\alpha = c^2$. Commenter.

3. • Reprendre les calculs précédents en utilisant le lagrangien $\mathcal{L} = -\frac{mc}{2}\,U_\alpha U^\alpha$. Commenter.

VI. Forces électromagnétiques

1. • Pour une particule de charge q, on peut utiliser le lagrangien : $\mathcal{L} = -\frac{mc}{2}\,U_\alpha U^\alpha - q\,A_\alpha U^\alpha$.
   • En déduire les équations du mouvement avec les notations d'Euler-Lagrange.

2. • En déduire le hamiltonien, puis les équations du mouvement avec les notations de Hamilton.

VII. Description d'un photon

• La description corpusculaire d'un photon peut être obtenue grâce à la limite : $\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \to \frac{h\nu}{c^2}$.

• Étudier l'effet de cette limite avec un lagrangien : $\mathcal{L} = -mc\sqrt{\eta_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta}$, où $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\sigma}$.