RR. II - CHOCS RELATIVISTES

1. Quadrivecteur vitesse

• En mécanique relativiste, la position d'un point matériel dans l'espace-temps peut être repérée par le quadrivecteur position : $\overleftrightarrow{OM} = (ct, \overrightarrow{OM})$.

• La généralisation des grandeurs non relativistes doit veiller à se baser sur des définitions invariantes par changement de référentiel. Il est ainsi logique de définir le “quadrivecteur vitesse” à partir du temps propre : $d\tau = dt.\sqrt{1-\beta^2}$.

Ceci correspond au quadrivecteur : $\overleftrightarrow{U} = \frac{d\overleftrightarrow{OM}}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \vec{v})$ dont la pseudo-norme est constante : $\left\| \overleftrightarrow{U} \right\| = c$.

2. Énergie - quantité de mouvement

• Pour une particule de masse m non nulle, on peut définir le quadrivecteur “énergie - quantité de mouvement” par :

$$\overleftrightarrow{p} = m\overleftrightarrow{U} = m\frac{d\overleftrightarrow{OM}}{d\tau} = (\frac{E}{c}, \vec{p}) \quad \text{avec :} \quad E = \gamma\, mc^2 \quad ; \quad \vec{p} = \gamma\, m\vec{v}.$$

◊ remarque : ceci ne démontre pas comment ces propriétés découlent des symétries de l'espace-temps, mais résume simplement les résultats.

• Pour les faibles vitesses, on obtient $\gamma \approx 1$ et on retrouve $\vec{p} \approx m\vec{v}$; par contre, la limite des faibles vitesses donne : $E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$.

Ceci décrit une “énergie cinétique” : $E_c = E - E_0 = (\gamma - 1)\, mc^2$ s'ajoutant à une “énergie interne” liée à la masse : $E_0 = mc^2 = \left\| \overleftrightarrow{cp} \right\| = \sqrt{E^2 - c^2p^2}$.

◊ remarque : on peut omettre E_0 (constante) dans les calculs non relativistes, mais il est plus facile de raisonner avec E dans les calculs relativistes.

◊ remarque : $E_c \rightarrow \infty$ quand $v \rightarrow c$ (d'où nécessité d'une théorie relativiste).

• Le cas particulier du photon, forcément relativiste avec $m = 0$ et $\gamma = \infty$, nécessite toutefois des précisions.

L'énergie $E = h\nu$ et la propriété $\left\| c\overleftrightarrow{p} \right\| = 0$ conduisent alors à : $c\vec{p} = h\nu\,\overrightarrow{u_c}$ (avec un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_c} = \frac{\vec{c}}{c}$ selon la propagation).

◊ remarque : la comparaison des deux cas avec $\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v}$ suggère que la quantité dotée d'inertie et de pesanteur n'est pas la masse mais l'énergie E ; la description correcte des effets gravitationnels effectivement subis par le photon (pourtant de masse nulle) nécessite toutefois la relativité générale.

3. Chocs de particules

3.1. Propriétés générales

• Pour un système de points matériels, les énergies et quantités de mouvement s'ajoutent : $\overleftrightarrow{p} = \sum \overleftrightarrow{p_i}$.

• En l'absence de forces extérieures, le quadrivecteur $\overleftrightarrow{p}$ est conservé, mais les raisonnements de la mécanique newtonienne sont parfois modifiés.

Ainsi, le centre d'inertie G, tel que $\overleftrightarrow{p^*} = \sum \overleftrightarrow{p_i^*} = \overleftrightarrow{0}$ dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$, est le barycentre des énergies : $\overrightarrow{OG} = \frac{\sum\left(E_i\,\overrightarrow{OA_i}\right)}{\sum E_i}$ (en particulier les photons, de masse nulle, contribuent à la quantité de mouvement).

◊ remarque : de façon analogue un système de deux photons, de même fréquence mais se propageant dans des directions différentes, a globalement une masse non nulle : $mc^2 = h\nu \sqrt{2.(1-\cos(\theta))} = 2h\nu \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

• Certains résultats simples sont inchangés ; par exemple, pour un choc élastique dans $\mathcal{R}^*$, les quantités de mouvement sont conservées en norme :

$$\overrightarrow{p_1^*} + \overrightarrow{p_2^*} = \overrightarrow{p_1'^*} + \overrightarrow{p_2'^*} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad p_1^* = p_2^* \quad \text{et} \quad p_1'^* = p_2'^* \ ;$$

$E_1^* + E_2^* = E_1'^* + E_2'^*$ donne alors :

$$\sqrt{m_1^2c^2 + p_1^{*2}} + \sqrt{m_2^2c^2 + p_1^{*2}} = \sqrt{m_1^2c^2 + p_1'^{*2}} + \sqrt{m_2^2c^2 + p_1'^{*2}}$$

donc $p_1^* = p_1'^*$ et $p_2^* = p_2'^*$ (et de même pour les énergies).

• D'autres résultats moins évidents sont inchangés ; ainsi le choc d'une particule de masse m_1 sur une particule initialement immobile de masse $m_2 < m_1$ donne une déviation maximum telle que : $\sin(\theta_1) = \frac{m_2}{m_1}$.

• Par contre d'autres résultats sont modifiés ; ainsi le choc d'une particule de masse m_1 sur une particule initialement immobile de masse $m_2 = m_1$ donne : $\overrightarrow{p_1'} \bullet \overrightarrow{p_2'} > 0$ (au lieu de zéro), c'est-à-dire que l'angle des trajectoires après le choc est inférieur à $\frac{\pi}{2}$:

$$\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_1'} + \overrightarrow{p_2'} \quad \text{donc} \quad 2\overrightarrow{p_1'} \bullet \overrightarrow{p_2'} = p_1^2 - p'^2_1 - p'^2_2 \ ;$$

$$m^2c^4 = E_i^2 - c^2p_i^2 = E'^2_i - c^2p'^2_i$$

$$\text{donc} \quad 2c^2\overrightarrow{p_1'} \bullet \overrightarrow{p_2'} = E_1^2 + m^2c^4 - E'^2_1 - E'^2_2 \ ;$$

$$E_1 + mc^2 = E'_1 + E'_2 \quad \text{donc} \quad c^2\overrightarrow{p_1'} \bullet \overrightarrow{p_2'} = E'_1E'_2 - E_1E_2 \ ;$$

$$E_1E_2 = (E'_1 + E'_2 - E_2)\, E_2 \quad \text{donc} \quad c^2\overrightarrow{p_1'} \bullet \overrightarrow{p_2'} = (E'_1 - E_2)(E'_2 - E_2) \ ;$$

$$E'_i > E_2 = mc^2 \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{p_1'} \bullet \overrightarrow{p_2'} > 0.$$

3.2. Désintégration d'une particule

• La mécanique des chocs relativistes permet en outre de décrire la variation de l'énergie “interne” par l'intermédiaire de la masse.

• Par exemple pour une particule de masse M au repos, se désintégrant en deux particules de masses m_1 et m_2 (avec $m_1 + m_2 < M$) :

$$\vec{0} = \vec{p'_1} + \vec{p'_2} \quad \text{donc} \quad p'_1 = p'_2 \ ;$$

$$m_i^2c^4 = E_i^2 - c^2p_i^2 \quad \text{donc} \quad E'^2_1 - E'^2_2 = (m_1^2 - m_2^2)\, c^4 \ ;$$

$$Mc^2 = E'_1 + E'_2 \quad \text{donc} \quad E'_1 + E'_2 = (m_1^2 - m_2^2)\, \frac{c^2}{M} \ ;$$

$$E'_1 = [M^2 + (m_1^2 - m_2^2)]\, \frac{c^2}{2M} \ ; \quad E'_2 = [M^2 - (m_1^2 - m_2^2)]\, \frac{c^2}{2M} \ ;$$

$$p'_i = \sqrt{\frac{E'^2_i}{c^2} - m_i^2c^2} = \frac{c}{2M}\sqrt{M^4 - 2M^2.\left(m_1^2 + m_2^2\right) + \left(m_1^2 - m_2^2\right)^2} \ ;$$

$$p'_i = \frac{c}{2M}\sqrt{\left(M + m_1 + m_2\right)\left(M - m_1 - m_2\right)\left(M + m_1 - m_2\right)\left(M - m_1 + m_2\right)}.$$

3.3. Effet Compton

• La mécanique des chocs relativistes peut traiter aussi les chocs avec les photons ; ainsi l'effet Compton décrit le choc élastique d'un photon (1) sur un électron libre initialement immobile (2) :

$$\vec{p_1} = \vec{p'_1} + \vec{p'_2} \quad \text{donc} \quad \vec{p'_2} = \frac{h}{c}.(\nu\,\vec{u_c} - \nu'\,\vec{u'_c}) \ ;$$

$$E'^2_2 - m_e^2c^4 = p'^2_2 = h^2.[\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos(\theta)] \ ;$$

$$h\nu + m_ec^2 = h\nu' + E'_2 \quad \text{donc} \quad E'_2 - m_ec^2 = h.(\nu - \nu') \ ;$$

$$E'_2 + m_ec^2 = h.(\nu - \nu') + 2m_ec^2 \ ;$$

$$E'^2_2 - m_e^2c^4 = h^2.(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu') + 2m_ec^2h.(\nu - \nu') \ ;$$

par comparaison : $c.\dfrac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} = \lambda' - \lambda = \dfrac{h}{m_ec}.[1 - \cos(\theta)].$

◊ remarque : comme pour tous les chocs, les quantités de mouvement initiales et finales sont coplanaires, mais les données sont insuffisantes pour tout calculer dans le cas général ; on se limite ici à calculer la variation de l'énergie du photon en fonction de l'angle de déviation (supposé connu).