CHOCS RELATIVISTES - exercices

I. Énergie de masse et désintégration d'un neutron

• On considère un neutron au repos ; il peut se désintégrer par réaction nucléaire : $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$.

• Calculer l'énergie libérée par la réaction.

◊ remarque : ces désintégrations, lorsqu'elles se produisent à l'intérieur des noyaux atomiques, sont responsables de la radioactivité β^- ; pour simplifier, les antineutrinos $\bar{\nu}$ sont souvent omis dans l'écriture de la réaction, mais ils sont indispensables pour décrire la conservation (entre autres) de l'énergie et de la quantité de mouvement.

Données : $m(n) = 939{,}506\ \text{MeV}/c^2$; $m(p) = 938{,}213\ \text{MeV}/c^2$;
$m(e^-) = 0{,}511\ \text{MeV}/c^2$; $m(\bar{\nu}) = 0{,}000\ \text{MeV}/c^2$.

II. Puissance émise par le Soleil

1. • La puissance émise par le Soleil est $P = 3{,}8.10^{26}$ W ; quelle est la diminution de masse correspondante en un siècle ?

2. • Comparer cette diminution de masse à la masse du Soleil : $M = 2{,}0.10^{30}$ kg.

III. Désintégration d'un pion

• Un méson π (aussi nommé “pion”), au repos, se désintègre en donnant un lepton μ (aussi nommé “muon”) et un antineutrino : $\pi \rightarrow \mu + \bar{\nu}$. Les

1. • Calculer l'énergie cinétique $E_{c\mu}$ du muon (exprimée en MeV).

2. • Calculer (en norme) les quantités de mouvement p_μ et p_ν des deux particules produites (exprimées en MeV/c).

Données : $m(\pi) = 139{,}6\ \text{MeV}/c^2$; $m(\mu) = 105{,}7\ \text{MeV}/c^2$; $m(\bar{\nu}) = 0{,}000\ \text{MeV}/c^2$.

IV. Collision élastique de deux particules

• Un neutron, dont la masse est notée m_1, entre en collision élastique avec un deuton (noyau ${}^2_1\text{H}$), de masse $m_2 \approx 2m_1$, initialement immobile dans le référentiel du laboratoire.

1. • En supposant que le neutron est “diffusé” à angle droit, calculer la fraction de l'énergie cinétique qu'il perd au cours du choc : $\dfrac{E_{c1} - E'_{c1}}{E_{c1}}$, en fonction de E_{c1}, c, m_1 et m_2.

2. • Que devient le résultat précédent si $E_{c1} \ll m_1 c^2$?

V. Création d'une paire particule-antiparticule

• Le positon e^+ est l'antiparticule de l'électron e^-. Un positon et un électron qui entrent en collision peuvent s'annihiler pour former deux photons : $e^+ + e^- \rightarrow 2\,\gamma$. Inversement, dans certaines conditions, un photon peut se désintégrer en une paire e^+e^- : $\gamma + M \rightarrow e^+ + e^- + M^*$.

1. • Montrer que la création d'une paire e^+e^- est impossible à partir de la seule désintégration "spontanée" d'un photon.

2. a) Montrer que la création d'une paire e^+e^- est possible par choc d'un photon sur un noyau d'atome, de masse M, initialement immobile (et qui ne se transforme pas au cours du choc).
   b) Calculer la fréquence minimum du photon permettant d'obtenir cette réaction.
   c) Calculer sa longueur d'onde maximum dans le cas où $M \gg m_e$.

Données : $m(e^+) = m(e^-) = 0{,}511$ MeV/c^2 ; $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s.

VI. Effet Compton

• Un photon d'énergie $E = 350$ keV est diffusé par un électron initialement au repos. Après la collision, cet électron a une énergie cinétique $E_c = 200$ keV.

1. • Calculer la longueur d'onde λ du photon incident et la longueur d'onde λ' du photon diffusé.

2. • Quel est l'angle θ de diffusion ?

Données : $m(e^-) = 0{,}511$ MeV/c^2 ; $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s.

VII. Effet Compton et énergie de "recul" de l'électron

• Un photon incident, de fréquence ν_0, entre en collision avec un électron, de masse m_0, initialement au repos dans le référentiel du laboratoire (supposé galiléen). Après le choc le photon, diffusé dans une direction faisant un angle α avec la direction incidente, a pour fréquence ν. L'électron prend alors une vitesse $\vec{v}$ faisant un angle θ avec la direction incidente.

1. • Montrer que les trajectoires du photon incident, du photon diffusé et de l'électron sont coplanaires.

2. • Quelles sont les énergies respectives $E_{\gamma 1}$ et E_{e1} du photon incident et de l'électron avant le choc ?

3. a) En considérant la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, calculer l'énergie E_{e2} et (en norme) la quantité de mouvement p_{e2} de l'électron après le choc, en fonction de ν_0, ν, m_e, h, α et c.
   b) En déduire la fréquence ν du photon diffusé, en fonction de ν_0, α et de la proportion $x = \dfrac{E_{\gamma 1}}{E_{e1}}$.
   c) Calculer de même sa longueur d'onde λ, en fonction de λ_0, α et x.

4. • Calculer $\tan(\theta)$ en fonction de α et x.

5. a) Quelle est l'énergie cinétique E_{ce2} de recul de l'électron en fonction de x, m_e et c ?
   b) La comparer à l'énergie du photon diffusé en calculant le rapport $\dfrac{E_{ce2}}{E_{\gamma 2}}$.

6. • Quelles est la vitesse de recul de l'électron ?

Données : $m(e^-) = 0{,}511$ MeV/c^2 ; $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s ; $\lambda_0 = 20$ pm ; $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

VIII. Énergie disponible dans le référentiel du centre d'inertie

• On considère deux particules identiques de masse M (par exemple des protons) dont les quantités de mouvement respectives $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$ (mesurées dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire) sont parallèles à l'axe (Ox). Leurs énergies sont E_1 et E_2. Il existe un référentiel $\mathcal{R}^*$, nommé “référentiel du centre d'inertie”, tel que la quantité de mouvement totale y soit nulle.

1. • Déterminer la vitesse $v_0 = \beta_0 c$ de $\mathcal{R}^*$ par rapport à $\mathcal{R}$ en fonction de $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$, E_1 et E_2.

2. • Lors des collisions, les processus physiques tels que le transfert d'énergie ou la création de paires particule-antiparticule dépendent essentiellement de l'énergie E^* disponible dans $\mathcal{R}^*$. Pour réaliser cette condition, on fait tourner les particules en sens inverse sur des trajectoires à peu près circulaires (“anneaux de collision”) de telle sorte que les vitesses soient opposées au moment du choc.
   a) Calculer E^* dans le cas où $p_1 + p_2 = 0$ algébriquement selon (Ox).
   b) Calculer numériquement dans le cas où $E_{c1} = E_{c2} = 25$ GeV.

3. a) Calculer $E^{*\prime}$ dans le cas où $p_2 = 0$ (particule cible immobile dans $\mathcal{R}$) en fonction de M, c et p_1.
   b) Montrer que $E^{*\prime 2} = 2Mc^2 E$ (où E est l'énergie totale dans $\mathcal{R}$).
   c) Quelle énergie cinétique E_{c1} faut-il atteindre pour disposer de $E^{*\prime} = 50$ GeV ?

Données : $M = m(p) = 938$ MeV/c^2.

IX. Pseudo-norme et invariance des intervalles d'espace-temps

1. • Une particule de masse m, émise par un dispositif émetteur E, parcourt une distance L, avec une quantité de mouvement p dans le référentiel du laboratoire, avant d'être détectée par un récepteur R. La durée de ce trajet, dans le référentiel du laboratoire, est T.
   a) Quelle est la vitesse de la particule dans le référentiel du laboratoire ?
   b) Quelle est la durée du trajet dans le “référentiel propre” de la particule ?
   c) Quelle est la vitesse de E et R dans le référentiel de la particule ?
   d) Quelle distance la particule perçoit-elle avoir ainsi “parcouru” ?

2. • Pour traiter le cas d'un photon de quantité de mouvement p, on considère la limite du cas précédent pour $m \to 0$ et $v \to c$.
   a) Quelle est la durée du trajet perçu par le photon dans son “référentiel propre” ?
   b) Quelle distance le photon perçoit-il avoir ainsi “parcouru” ?

X. Énergie cinétique

1. • Un méson π^0 se déplace à la vitesse $v = \beta c$, avec $\beta = 0{,}8$. Calculer son énergie cinétique.

2. • Comparer à la valeur donnée par la mécanique classique.

Données : $m(\pi) = 139{,}6$ MeV/$c^2 = 2{,}49.10^{-28}$ kg.

XI. Réactions nucléaires

• L'énergie libérée dans une réaction nucléaire provient de la différence de masse entre les particules finales et initiales. La désintégration de l'uranium produit un atome de thorium et un atome d'hélium.

• Calculer l'énergie libérée par la désintégration d'un atome d'uranium (exprimée en MeV).

Données : m(U) = 232,03714 u ; m(Th) = 228,02873 u ; m(He) = 4,00260 u ; 1 u = $1{,}6605.10^{-27}$ kg.

XII. Masse d'un proton

• Calculer l'énergie et la masse d'un proton dont l'énergie cinétique est la moitié de son énergie totale.
• À quelle vitesse se déplace-t-il ?

Donnée : m(p) = $1{,}67.10^{-27}$ kg.

XIII. Énergie et quantité de mouvement

1. a) On cherche l'expression relativiste de l'énergie d'une particule isolée, dans un référentiel galiléen. Justifier que l'expression doit être de la forme $E = E(v^2)$ telle que $E_c(v^2) = E(v^2) - E(0)$ avec la limite pour les faibles vitesses $\frac{E_c(v^2)}{v^2} \to \frac{m}{2}$.

b) On cherche l'expression relativiste de la quantité de mouvement d'une particule isolée, dans un référentiel galiléen. Justifier que l'expression doit être de la forme $\vec{p} = m(v^2)\,\vec{v}$ avec la limite pour les faibles vitesses $m(v^2) \to m$.

2. a) On considère un choc élastique (répulsif) de deux particules identiques. Justifier que, quitte à changer éventuellement de référentiel galiléen, le choc peut être décrit dans un plan (qu'on peut choisir comme étant xOy).

b) On suppose qu'il existe un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ par rapport auquel la particule A est lancée de telle façon que $v_{Ax}^{(in)} = 0$ et $v_{Ay}^{(in)} = V$. On suppose de façon analogue qu'il existe un référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ par rapport auquel la particule B est lancée de telle façon que $v_{Bx}'^{(in)} = 0$ et $v_{By}'^{(in)} = -V$. Justifier que, quel que soit le choc, une telle configuration de deux référentiels existe.

c) On considère le cas particulier tel qu'après le choc $v_{Ax}^{(fi)} = 0$. Justifier que cette configuration existe et que le fait de raisonner dans ce cas ne réduit pas le domaine de validité du résultat obtenu pour $m(v^2)$.

d) Exprimer dans ce cas $v_{Ay}^{(fi)}$, $v_{Bx}'^{(fi)}$ et $v_{By}'^{(fi)}$.

3. a) Calculer inversement par rapport à $\mathcal{R}'$: $v_{Ax}'^{(in)}$, $v_{Ay}'^{(in)}$, $v_{Ax}'^{(fi)}$ et $v_{Ay}'^{(fi)}$.

b) Calculer de même par rapport à $\mathcal{R}$: $v_{Bx}^{(in)}$, $v_{By}^{(in)}$, $v_{Bx}^{(fi)}$ et $v_{By}^{(fi)}$ (on peut vérifier les rôles symétriques des deux particules et des deux référentiels).

c) Écrire les relations de conservation de la quantité de mouvement selon Ox et Oy.

d) En déduire l'expression de $m(v^2)$ (et donc celle de $\vec{p}$).