# RR. III - FORCES RELATIVISTES

## 1. Forces relativistes

### 1.1. Quadrivecteur "force"

• De façon analogue au quadrivecteur énergie - quantité de mouvement, exprimé à partir du temps propre $\tau$ : $\overleftrightarrow{p} = m\overleftrightarrow{U} = m\,\dfrac{d\overleftrightarrow{OM}}{d\tau} = \left(\dfrac{E}{c},\ \vec{p}\right)$, la définition relativiste des "forces" correspond à : $\overleftrightarrow{f} = \dfrac{d\overleftrightarrow{p}}{d\tau}$.

☞ remarque : puisque le quadrivecteur vitesse a une pseudo-norme constante $\left(\left\|\overleftrightarrow{U}\right\| = c\right)$, il est forcément "orthogonal" à la quadri-force du point de vue du pseudo-produit scalaire : $\overleftrightarrow{p}\cdot\overleftrightarrow{f} = m^2\,\overleftrightarrow{U}\cdot\dfrac{d\overleftrightarrow{U}}{d\tau} = \dfrac{m^2}{2}\,\dfrac{d\left(\overleftrightarrow{U}^2\right)}{d\tau} = 0$.

• Pour connaître l'expression de cette 4-force relativiste, on peut se ramener à son expression $(0,\ \vec{f}')$ dans le référentiel galiléen où le point est au repos à l'instant considéré :

◊ la composante temporelle y est nulle car $t' = \tau$ et $\dfrac{d^2(ct')}{d\tau^2} = 0$ ;

◊ la partie spatiale y correspond à la force $\vec{f}'$ non relativiste.

Pour un point de vitesse $\vec{v}$, la transformation de Lorentz $f^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(\vec{v})\,f'^{\beta}$ donne ainsi : $\vec{f} = \vec{f}' + (\gamma - 1)\,\dfrac{\vec{f}'\cdot\vec{v}}{v^2}\,\vec{v}$ ; $f^0 = \gamma\,\dfrac{\vec{f}'\cdot\vec{v}}{c} = \dfrac{\vec{f}\cdot\vec{v}}{c}$.

• En intégrant l'équation différentielle, on peut donc calculer $(ct,\ \overrightarrow{OM})$ en fonction de $\tau$, puis (en éliminant $\tau$) en déduire $\overrightarrow{OM}$ en fonction de t.

## 1.2. Forces relativistes

• Bien que ne respectant pas la formulation relativiste, on raisonne plutôt directement avec le “4-objet” $\overleftrightarrow{f} = (\frac{\mathcal{P}}{c}, \vec{f}) = \frac{d\overleftrightarrow{p}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \overleftrightarrow{\mathcal{f}}$ (qui ne se transforme pas comme un 4-vecteur), regroupant avec la puissance $\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v}$ :

◊ la relation fondamentale de la dynamique (relativiste) : $\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ ;

◊ le théorème de l'énergie cinétique : $dE = dE_c = \mathcal{P} dt = \delta W$ ($dE_0 = 0$).

◊ remarque : ces deux lois sont reliées car $E_0 = mc^2 = \left\| \overleftrightarrow{cp} \right\|$ est constante.

• En mécanique relativiste, les forces varient donc lors d'un changement de référentiel galiléen :

$$f'_x = \frac{f_x - \frac{v_e}{c^2} \vec{f} \cdot \vec{v}}{1 - \frac{v_e v_x}{c^2}} \quad ; \quad f'_y = \frac{f_y \sqrt{1 - \frac{{v_e}^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_e v_x}{c^2}} \quad \text{(et de même } f'_z\text{).}$$

◊ remarque : en particulier, le changement dépend de la vitesse du point matériel donc les actions réciproques entre deux points ne sont pas forcément opposées ; cela provient de la nécessaire propagation des interaction (l'action et la réaction ne correspondent pas au même instant).

📖 *exercices n° I et II.*

# 2. Force électromagnétique

## 2.1. Vecteurs et tenseurs

• On dit qu'un quadrivecteur est “contravariant” s'il se transforme comme les coordonnées selon la transformation de Lorentz : $V'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} V^{\beta}$.

On obtient un quadrivecteur “covariant” en “abaissant l'indice” : $V'_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} V^{\beta}$.

Un quadrivecteur "covariant" suit la loi de transformation : $V'_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\beta V_\beta$ où $\Lambda_\alpha{}^\beta = \eta_{\alpha\gamma}\, \eta^{\beta\delta}\, \Lambda^\gamma{}_\delta$ (avec $\eta^{\beta\delta} = \eta_{\beta\delta}$) est la matrice inverse de $\Lambda^\beta{}_\alpha$ :

$$\Lambda^\beta{}_\alpha = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \quad ; \quad \Lambda_\alpha{}^\beta = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \quad ;$$

$$\Lambda_\alpha{}^\gamma\, \Lambda^\alpha{}_\beta = \eta_{\alpha\delta}\, \eta^{\gamma\varepsilon}\, \Lambda^\delta{}_\varepsilon\, \Lambda^\alpha{}_\beta = \eta_{\varepsilon\beta}\, \eta^{\gamma\varepsilon} = \delta^\gamma{}_\beta \quad \text{(matrice unité).}$$

• Un exemple de quadrivecteur dont la définition est donnée par sa forme covariante est le gradient $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ (plus simplement noté $\partial_\alpha$) :

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta\, x^\beta \;;\; x^\gamma = \Lambda_\alpha{}^\gamma\, x'^\alpha \;;\; \partial'_\alpha = \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta} = \Lambda_\alpha{}^\beta\, \partial_\beta .$$

• Plus généralement, les grandeurs se transformant de façon analogue avec plusieurs indices sont appelées "tenseurs" : $T'_\alpha{}^{\beta\gamma} = \Lambda_\alpha{}^\mu\, \Lambda^\beta{}_\nu\, \Lambda^\gamma{}_\rho\, T_\mu{}^{\nu\rho}$.

◊ remarque : le tenseur de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ est un cas particulier dont les composantes covariantes et contravariantes ont les mêmes valeurs ; ses composantes mixtes donnent la matrice unité $\delta^\alpha{}_\beta = \delta_\alpha{}^\beta$.

## 2.2. Champ électromagnétique

• Avant la théorie de la relativité, l'électromagnétisme était déjà décrit par les équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ (où } \rho \text{ est la densité de charge)} \;;\; \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \;;$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \;;\; \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\, \vec{j} + \varepsilon_0\, \mu_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \text{ (où } \vec{j} \text{ est la densité de courant) ;}$$

avec l'équation de "continuité" : $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$.

◊ remarque : pour ne pas confondre avec le champ $\vec{E}$ on note ici l'énergie $\mathcal{E}$.

• Or, la combinaison de ces équations donne des relations décrivant la propagation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ avec la vitesse de la lumière $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ indépendante du référentiel galiléen :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \eta^{\alpha\beta}\ \partial_\alpha\ \partial_\beta\ \vec{E} = \Box\vec{E} = \vec{0} \ ; \ \Box\vec{B} = \vec{0}.$$

Ainsi ces équations de l'électromagnétisme sont déjà “relativistes” (ce qui a conduit à remplacer la mécanique newtonienne pour la rendre compatible).

• Ceci permet d'exprimer un tenseur champ électromagnétique (antisymétrique) :

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut en outre définir un 4-potentiel $\overleftrightarrow{A} = (\frac{V}{c}, \vec{A})$ tel que le champ soit $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, équivalant à $\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$.

• D'après la transformation de $F^{\alpha\beta}$, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ varient de façon non évidente lors d'un changement de référentiel :

$$E'_x = E_x \ ; \ E'_y = \gamma_e.(E_y - v_e\, B_z) \ ; \ E'_z = \gamma_e.(E_z - v_e\, B_y) \ ;$$

$$B'_x = B_x \ ; \ B'_y = \gamma_e.(B_y - \frac{v_e}{c^2}\, E_z) \ ; \ B'_z = \gamma_e.(B_z - \frac{v_e}{c^2}\, E_y).$$

• Pour écrire les équations de Maxwell sous forme invariante, on peut définir un quadrivecteur densité de courant $\overleftrightarrow{j} = (\rho c, \vec{j})$ vérifiant l'équation de continuité : $\overleftrightarrow{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{j} = \partial_\alpha j^\alpha = 0$.

◊ remarque : il n'est pas évident que $\overleftrightarrow{j} = \rho \frac{d\overleftrightarrow{OM}}{dt}$ soit un 4-vecteur, puisque (pour les transformations de Lorentz) ρ n'est pas un scalaire et $\frac{d\overleftrightarrow{OM}}{dt}$ n'est pas un 4-vecteur ; lors d'un changement de référentiel galiléen, la contraction des longueurs comme $\frac{1}{\gamma}$ cause une augmentation de ρ selon γ, de même que la dilatation des durées ; on peut donc supposer qu'il existe un 4-vecteur dont la composante “temporelle” est proportionnelle à ρ ; en notant le 4-volume $d^4\mathcal{V} = c\ dt\ d^3\mathcal{V}$, on peut alors considérer que la 4-densité $\frac{dq}{d^4\mathcal{V}} = \frac{\rho}{c\ dt}$ est un scalaire ; or $d\overleftrightarrow{OM}$ est un quadrivecteur, donc $\overleftrightarrow{j}$ aussi.

• Avec ces notations, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0\, j^\beta \quad ; \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \partial_\beta F_{\gamma\,\delta} = 0.$$

La première équation est analogue à une 4-divergence, mais ne peut pas s'exprimer avec “$\overleftrightarrow{\nabla}\cdot$” car il faut indiquer sur quel indice de $F^{\alpha\beta}$ elle s'applique.

Dans la seconde équation, le tenseur de Levi-Civita $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ est égal à ±1 si ses indices sont une permutation respectivement paire ou impaire de 0123 (et nul sinon). C'est analogue à un 4-rotationnel, mais ne peut pas s'exprimer avec “$\overleftrightarrow{\nabla}\times$” car le résultat n'a qu'un indice alors qu'un 4-rotationnel en a deux.

## 2.3. Loi de force de Lorentz

• Les expressions relativistes précédentes suggèrent pour la force électromagnétique l'expression : $f^\alpha = \frac{dp^\alpha}{d\tau} = m\ \frac{dU^\alpha}{d\tau} = q\ F^\alpha{}_\beta\ U^\beta$.

• La substitution de $dt = \gamma\ d\tau$ donne pour la force de Lorentz relativiste la même expression qu'en mécanique newtonienne : $\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + q\,\vec{v}\times\vec{B}$.

◊ remarque : ici encore, ces équations de l'électromagnétisme sont déjà “relativistes” (ce qui a justifié de remplacer la mécanique newtonienne).

◊ remarque : il est ici moins simple de se ramener à l'expression $(0, \vec{f}')$ avec $\vec{f}' = q\vec{E}'$ dans le référentiel galiléen particulier où le point est au repos à l'instant considéré (méthode de la partie 1.1).

# 3. Mouvements relativistes de particules chargées

## 3.1. Accélération par un champ électrostatique uniforme

• La relation $\vec{p}^{\bullet} = q\vec{E}$, avec la condition initiale $\vec{p}(0) = \vec{0}$, s'intègre en :

$\vec{p} = q\vec{E}t$ (mouvement rectiligne, accéléré selon $\vec{E}$).

Algébriquement, la relation : $\dfrac{mv}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = qEt$ peut ensuite se résoudre sous la forme : $v = \dfrac{c\alpha t}{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}$ en posant $\alpha = \dfrac{qE}{mc}$.

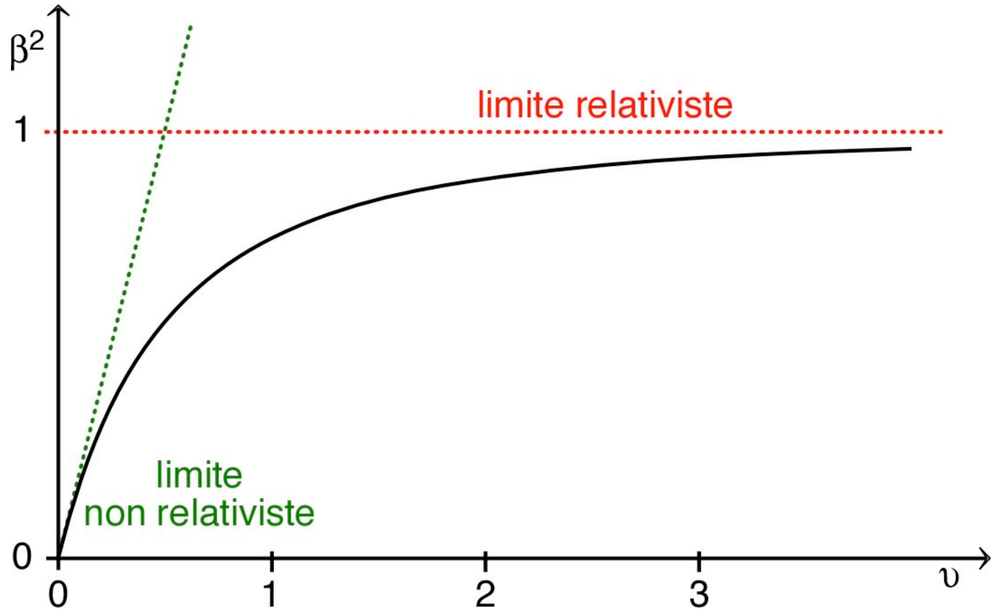
On retrouve $v \approx \dfrac{qE}{m}\,t$ pour la limite des faibles vitesses $(t \rightarrow 0)$ mais on obtient $v \rightarrow c$ pour $t \rightarrow \infty$.

• Dans le cas $x(0) = 0$, la seconde intégration donne : $x = \dfrac{c}{\alpha}\cdot\left(\sqrt{1+\alpha^2 t^2} - 1\right)$.

## 3.2. Accélération par une tension constante

• Le champ électrostatique est rarement uniforme, mais on peut calculer l'effet global d'une tension accélératrice U constante à l'aide de l'énergie cinétique.

La relation $dE_c = \delta W = q\ dV$, avec la condition initiale $E_c(0) = 0$, donne : $E_c = (\gamma - 1)\ mc^2 = qU$. On en tire : $v = c\,.\dfrac{\sqrt{\upsilon\cdot(\upsilon+2)}}{\upsilon+1}$ en posant $\upsilon = \dfrac{qU}{mc^2}$.




## 3.3. Mouvement dans un champ magnétique uniforme et constant

• La relation $\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$ peut s'écrire : $\vec{p}^{\bullet} = \dfrac{q}{\gamma\, m}\,\vec{p}\times\vec{B}$ ; par suite $\vec{p}^{\bullet} \perp \vec{p}$ et la norme p est constante. Il en découle que v et $\gamma$ aussi sont constantes.

Avec un repère tel que $\vec{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$ et en considérant le cas $q > 0$, l'équation différentielle peut alors se simplifier : $\vec{v}^{\bullet} = -\vec{\omega}\times\vec{v}$ avec $\omega = \dfrac{qB}{\gamma\, m}$.

Le problème est donc le même qu'en mécanique newtonienne (seule change l'expression de $\omega$) : $x^{\bullet\bullet} = \omega\, y^{\bullet}$ ; $y^{\bullet\bullet} = -\omega\, x^{\bullet}$ ; $z^{\bullet\bullet} = 0$.

Ainsi, pour un départ à l'origine O et une vitesse perpendiculaire à (Ox), le mouvement est hélicoïdal avec $z = v_{0z}\, t$ et la projection sur (Oxy) est circulaire :

$x^{\bullet} = \omega\, y$ ; $y^{\bullet} = -\omega\, x + v_{0y}$ ;

$x^{\bullet\bullet} + \omega^2\, x = \omega v_{0y}$ ; $y^{\bullet\bullet} + \omega^2\, y = 0$ ;

$x = R + X\cos(\omega t + \phi)$ (avec $R = \dfrac{v_{0y}}{\omega}$) ; $y = Y\cos(\omega t + \psi)$ ;

$x = R.[1 - \cos(\omega t)]$ ; $y = R\sin(\omega t)$.

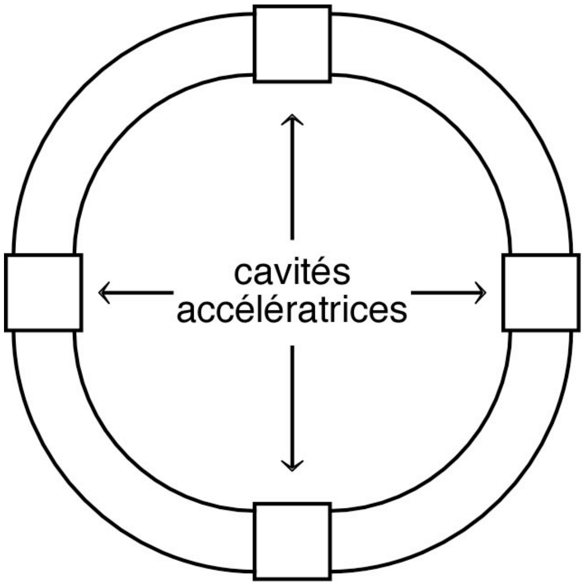
• Ceci s'applique aux accélérateurs circulaires de type cyclotron, mais on constate que la vitesse de rotation $\omega = \frac{qB}{\gamma m} \rightarrow 0$ quand $v \rightarrow c$ ; il faut donc synchroniser les variations du champ $\vec{E}$ dans les “cavités accélératrices”.

On obtient ainsi un synchrocyclotron, qui ne peut fonctionner que de façon pulsée. Mais inversement dans ce cas, on peut en profiter pour ajuster B pour que le rayon $R = \frac{\gamma mv}{qB}$ reste constant, ce qui donne un synchrotron.

Or, les particules ainsi accélérées tendent à perdre, par émission d'ondes électromagnétiques, une partie importante de l'énergie reçue (le fonctionnement d'un accélérateur puissant nécessite une centrale électrique de 1 GW).

L'utilisation d'un rayon constant a l'avantage de diminuer l'étendue des zones d'application du champ magnétique, d'autant plus que le rayon devient de l'ordre de 10 km, d'une part pour limiter l'émission électromagnétique, d'autre part à cause du champ B limité à ≈ 40 T (même avec des aimants supraconducteurs).

Un autre avantage est la possibilité de multiplier les cavités accélératrices.




◊ remarque : la relation $p = qBR$ permet aussi de mesurer la quantité de mouvement en mesurant le rayon de courbure.

📖 *exercices n° III, IV, V, VI, VII, VIII, IX et X.*