FORCES RELATIVISTES - corrigé des exercices

I. Théorème des moments

1. • La relation fondamentale de la dynamique peut s'écrire pour un point matériel M : $\vec{p}^{\bullet} = \vec{F}$, où $\vec{F}$ représente la résultante des forces appliquées au point matériel.

• En définissant le moment cinétique par $\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \times \vec{p}$ et le moment de $\vec{F}$ par $\vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{OM} \times \vec{F}$, on obtient : $\vec{\sigma}^{\bullet} = \vec{v} \times \vec{p} + \overrightarrow{OM} \times \vec{F} = \vec{\mathcal{M}}$.

• Pour un système de points matériels $\{M_i\}$ on peut généraliser par le théorème du centre d'inertie : $\vec{p}^{\bullet} = \sum \vec{p_i}^{\bullet} = \sum \vec{F_i} = \vec{F}$, où $\vec{F_i}$ représente la résultante des forces appliquées au point M_i.

• De même on peut considérer : $\vec{\sigma}^{\bullet} = \sum \vec{\sigma_i}^{\bullet} = \sum \vec{\mathcal{M}_i} = \vec{\mathcal{M}}$, où $\vec{\mathcal{M}_i}$ représente le moment résultant des forces appliquées au point M_i.

2.a. • La relation fondamentale de la dynamique peut s'écrire : $f^{\alpha} = p^{\alpha\bullet}$.

• On peut définir un tenseur moment cinétique par $\sigma^{\mu\nu} = x^{\mu}p^{\nu} - x^{\nu}p^{\mu}$ et un tenseur moment de la force résultante par $\mathcal{M}^{\mu\nu} = x^{\mu}f^{\nu} - x^{\nu}f^{\mu}$.

• La dérivation donne : $\sigma^{\alpha\beta\,\bullet} = v^{\mu}p^{\nu} + x^{\mu}f^{\nu} - v^{\nu}p^{\mu} - x^{\nu}f^{\mu} = \mathcal{M}^{\mu\nu}$ (avec $v^{\mu}p^{\nu} = v^{\nu}p^{\mu}$). Ceci peut se généraliser à un système de points par sommation.

• On peut aussi définir un tenseur moment cinétique par $\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}x^{\mu}p^{\nu}$ (où $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ est le tenseur totalement antisymétrique de Levi-Civita) et un tenseur moment de la force résultante par $\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}x^{\mu}f^{\nu}$.

• La dérivation donne : $\sigma_{\alpha\beta}^{\bullet} = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}v^{\mu}p^{\nu} + \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}x^{\mu}f^{\nu} = \mathcal{M}_{\alpha\beta}$ (avec $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}v^{\mu}p^{\nu} = 0$ car le produit d'un tenseur antisymétrique par un tenseur symétrique est nul : en intervertissant deux indices il doit à la fois changer de signe et rester identique). Ceci aussi peut se généraliser à un système de points par sommation.

2.b. • Un tenseur quadridimensionnel antisymétrique à deux indices a six composantes indépendantes (comme le champ électromagnétique). Les composantes “spatiales” correspondent au théorème usuel avec un changement de notations :

◊ pour la première formulation : $\vec{\sigma} = \sigma^{yz}\,\overrightarrow{u_x} + \sigma^{zx}\,\overrightarrow{u_y} + \sigma^{xy}\,\overrightarrow{u_z}$ (et de même pour $\vec{\mathcal{M}}$) ;

◊ pour la seconde formulation : $\vec{\sigma} = \sigma_{yz}\,\overrightarrow{u_x} + \sigma_{zx}\,\overrightarrow{u_y} + \sigma_{xy}\,\overrightarrow{u_z}$.

◊ remarque : avec la deuxième convention, les composantes du moment cinétique “usuel” peuvent s'écrire $\sigma^j = \varepsilon^{jkl}\,\sigma_{kl}$ mais ceci ne respecte pas la covariance relativiste.

2.c. • Les trois composantes “spatio-temporelles” correspondent à une autre propriété : $\sigma^{0j\,\bullet} = \mathcal{M}^{0j}$ (avec j = 1..3 pour les trois coordonnées spatiales).

• Pour un système de points isolé, cela peut s'écrire : σ^{0j} = Cste, ce qui correspond à définir un vecteur tridimensionnel constant : $\vec{\varsigma} = \sum\left(t\vec{p_i} - \frac{E_i}{c^2}\overrightarrow{OM_i}\right) = t\ \vec{p} - \sum\left(\frac{E_i}{c^2}\overrightarrow{OM_i}\right) = \overrightarrow{Cste}$. On peut arbitrairement choisir l'origine afin que cette constante soit nulle.

• Compte tenu du fait que dans ce cas $\vec{p}$ et E sont constants, si on définit alors un référentiel d'inertie associé à point G tel que $\vec{p} = \frac{E}{c^2}\,\overrightarrow{v_G}$, la relation précédente signifie que le point G se déplaçant à vitesse constante vérifie la relation : $\frac{E}{c^2}\,\overrightarrow{OG} = \frac{E}{c^2}\,\overrightarrow{v_G}\ t = \vec{p}\ t = \sum\left(\frac{E_i}{c^2}\overrightarrow{OM_i}\right)$. Ceci correspond effectivement avec la “définition” proposée par l'énoncé (elle ne dépend pas de l'origine choisie).

◊ remarque : ce “centre d'inertie” n'est par contre généralement pas indépendant du référentiel choisi (sa position ne se transforme pas selon la transformation de Lorentz).

II. Mouvement avec une quadri-accélération de pseudo-norme constante

1. • La quadri-vitesse $\vec{U} = \dfrac{d\overleftrightarrow{OM}}{d\tau}$ a pour pseudo-norme : $\left\|\vec{U}\right\| = \gamma\ \sqrt{c^2 - v^2} = c$.

• En dérivant la relation $\vec{U}\cdot\vec{U} = c^2$ on en déduit : $\vec{U}\cdot\vec{a} = 0$ avec la quadri-accélération $\vec{a} = \dfrac{d\vec{U}}{d\tau}$.

2. • En se limitant à la coordonnée x pour simplifier, la quadri-vitesse initiale peut s'écrire $\vec{U} = (c, 0)$.
• La quadri-accélération, orthogonale, a donc une expression initiale de la forme : $\vec{a} = (0, a)$.
• La pseudo-norme correspond donc à : $\left\|\vec{a}\right\|^2 = -a^2$ (supposée constante).

3. • L'équation sur la quadri-accélération peut s'écrire : $c^2\, \ddot{t}^2 - \ddot{x}^2 = \dot{\lambda}\ \dot{\mu} = -a^2$.
• Mais par ailleurs : $c^2\, \dot{t}^2 - \dot{x}^2 = \lambda\ \mu = c^2$.
• En écrivant $\mu = \dfrac{c^2}{\lambda}$ on obtient : $\dot{\mu} = -\,c^2 \dfrac{\dot{\lambda}}{\lambda^2}$; ainsi : $c^2 \dfrac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2} = a^2$; $c\ \dfrac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \pm\, a$; $\lambda = \lambda(0)\ e^{\pm a\,\tau/c}$.
• Ceci donne : $\dot{\mu} = \mp\ \dfrac{a\,c}{\lambda(0)}\ e^{\mp a\,\tau/c}$; $\mu = \dfrac{c^2}{\lambda(0)}\ e^{\mp a\,\tau/c} = \mu(0)\ e^{\mp a\,\tau/c}$ (avec une constante d'intégration nulle puisque $\lambda(0)\ \mu(0) = c^2$).
• Avec un départ immobile à l'origine : $\lambda(0) = c$ et $\mu(0) = c$.
• Ainsi : $c\dot{t} = \dfrac{1}{2}(\lambda + \mu) = c\cosh(\pm a\,\tau/c)$ et $\dot{x} = \dfrac{1}{2}(\lambda - \mu) = c\sinh(\pm a\,\tau/c)$.
• En choisissant un mouvement dans le sens de x croissant : $c\dot{t} = c\cosh(a\,\tau/c)$ et $\dot{x} = c\sinh(a\,\tau/c)$.
• On obtient ensuite (pour un départ à l'origine) : $ct = \dfrac{c^2}{a}\ \sinh(a\,\tau/c)$ et $x = \dfrac{c^2}{a}\ [\cosh(a\,\tau/c) - 1]$.

III. Mouvement d'une particule dans un condensateur

1. • La relation fondamentale de la dynamique peut s'écrire : $\dot{\vec{p}} = q\,\vec{E}$; compte tenu des conditions initiales, on en déduit : $p_x = p_0$ (constant) et $p_y = qEt$.

◊ remarque : le mouvement est plan et on omet la coordonnée $z = 0$ dans la suite.

2. • Pour déterminer x et y, on peut intégrer v_x et v_y d'après : $\vec{v} = \dfrac{c^2}{\mathcal{E}}\,\vec{p}$ avec $\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + c^2p^2 = \mathcal{E}_0^{\,2} + (qEct)^2$ et en posant $\mathcal{E}_0 = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^{\,2}}$.

• La première coordonnée correspond à : $v_x = \dot{x} = \dfrac{c^2p_0}{\sqrt{\mathcal{E}_0^{\,2} + (qEct)^2}}$; compte tenu des conditions initiales, on en tire : $x = \dfrac{cp_0}{qE}\ \operatorname{argsh}\left(\dfrac{qEct}{\mathcal{E}_0}\right)$.

◊ remarque : si on ne connaît pas les fonctions hyperboliques, l'expression précédente peut s'écrire : $x = \frac{cp_0}{qE}\ \ln\left(\frac{qEct}{\mathcal{E}_0} + \sqrt{1+\left(\frac{qEct}{\mathcal{E}_0}\right)^2}\right)$ mais l'intégration n'est pas évidente ; on peut poser $\xi = \frac{qEx}{cp_0}$ et $\alpha = \frac{qEct}{\mathcal{E}_0}$, ce qui donne : $d\xi = \frac{d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, puis $\alpha = \tan(\theta)$, d'où on tire : $d\xi = \frac{d\theta}{\cos(\theta)}$, puis $\lambda = \sin(\theta)$, d'où on déduit : $d\xi = \frac{d\lambda}{1-\lambda^2}$; la décomposition en fractions simples donne alors : $2\ d\xi = \frac{d\lambda}{1-\lambda} + \frac{d\lambda}{1+\lambda}$, qui s'intègre en : $2\xi + \text{Cste} = \ln\left(\frac{|1+\lambda|}{|1-\lambda|}\right)$; les conditions initiales (à $t = 0$) donnent : $\alpha = 0$, $\theta = 0$ et $\lambda = 0$, avec par ailleurs : $x = 0$ et $\xi = 0$, donc Cste = 0 ; on aboutit ainsi à :

$$\xi = \ln\left(\sqrt{\frac{|1+\lambda|}{|1-\lambda|}}\right) = \ln\left(\frac{|1+\lambda|}{\sqrt{|1-\lambda^2|}}\right) = \ln\left(\frac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right) = \ln\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right).$$

• Pour la deuxième coordonnée : $v_y = y^\bullet = \frac{qEc^2t}{\sqrt{\mathcal{E}_0^{\,2} + (qEct)^2}}$; compte tenu des conditions initiales, on en déduit : $y = \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}_0}{qE}\right)^2 + c^2t^2} - \frac{\mathcal{E}_0}{qE}$.

3. • D'après l'expression de x(t) : $\frac{qEct}{\mathcal{E}_0} = \text{sh}\left(\frac{qEx}{cp_0}\right)$; en reportant dans l'expression de y(t), on obtient l'équation de la trajectoire : $y = \frac{\mathcal{E}_0}{qE}.\left(\text{ch}\left(\frac{qEx}{cp_0}\right) - 1\right)$.

◊ remarque : si on ne connaît pas les fonctions hyperboliques, la relation précédente peut s'écrire : $y = \frac{\mathcal{E}_0}{qE}.\left(\sqrt{1+\alpha^2} - 1\right)$ avec $\alpha + \sqrt{1+\alpha^2} = e^{\xi}$ et $\alpha = \frac{e^{2\xi}-1}{2e^{\xi}}$; ainsi : $y = \frac{\mathcal{E}_0}{qE}.\left(\frac{e^{\xi}+e^{-\xi}}{2} - 1\right)$.

4.a. • La limite non relativiste correspond à $v \ll c$, c'est à dire qu'elle correspond à la situation où on peut considérer que $c \to \infty$ en comparaison des autres paramètres ayant une unité de vitesse. Cela correspond en particulier à : $\xi = \frac{qEx}{cp_0} \to 0$ et donc : $\text{ch}\left(\frac{qEx}{cp_0}\right) - 1 = \text{ch}(\xi) - 1 \approx \frac{\xi^2}{2}$.

• On obtient par ailleurs : $\mathcal{E}_0 \approx mc^2$ à l'ordre le plus bas ; ceci redonne la trajectoire “classique” :

$$y \approx \frac{mqEx^2}{2p_0^{\,2}} \approx \frac{qEx^2}{2mv_0^{\,2}}.$$

◊ remarque : si on ne connaît pas les fonctions hyperboliques, on retrouve le même résultat en développant les exponentielles.

4.b. • Les conditions de validité de l'approximation sont :

◊ pour le développement de $\mathcal{E}_0$: $cp_0 \ll mc^2$, donc : $p_0 \ll mc$;

◊ pour le développement de ch(ξ) ou des exponentielles : $\xi = \frac{qEx}{cp_0} \to 0$ pour tout $x \in [0 ; 1]$, c'est à dire : $p_0 \gg \frac{qEL}{c}$.

4.c. • Cette seconde condition peut sembler paradoxale dans la mesure où la limite relativiste correspond plus logiquement à p_0 petit (ce qui est le cas pour la première condition). Il faut toutefois considérer qu'une vitesse trop petite selon (Ox) implique une grande durée de traversée du condensateur, donc l'accélération par le champ électrique peut dans ce cas donner une vitesse relativiste selon (Oy).

IV. Théorème de l'énergie cinétique et trajectoire

1. • La relation fondamentale de la dynamique peut s'écrire : $\vec{p}^{\bullet} = q\vec{E}$; compte tenu des conditions initiales, on en tire : $p_x = p_0$ (constant) et $p_y = qEt$.

◊ remarque : le mouvement est plan et on omet la coordonnée $z = 0$ dans la suite.

2.a. • En comparant $p_x = \gamma\, m \dfrac{dx}{dt}$ et $p_y = \gamma\, m \dfrac{dy}{dt}$ on obtient : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{p_y}{p_x} = \dfrac{qEt}{p_0}$.

2.b. • En dérivant cette expression par rapport à x, on obtient : $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{qE}{p_0}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{\gamma\, qEm}{{p_0}^2}$.

3. • D'après le théorème de l'énergie cinétique : $dE_c = d\mathcal{E} = \delta W = qE\, dy$ donc $\mathcal{E} = \gamma\, mc^2 = \mathcal{E}_0 + qEy$ avec la notation $\mathcal{E}_0 = \sqrt{m^2c^4 + c^2{p_0}^2}$.

• En reportant la valeur de γ dans l'expression précédente, on obtient : $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{qE}{c^2{p_0}^2}.(\mathcal{E}_0 + qEy)$.

4. • Cette équation différentielle est linéaire : $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \lambda^2 y = \dfrac{qE}{c^2{p_0}^2}\,\mathcal{E}_0$ avec $\lambda = \dfrac{qE}{cp_0}$.

• Une solution particulière est la constante $y = -\dfrac{\mathcal{E}_0}{qE}$; la solution générale “homogène” est de la forme : $y = A\, e^{\lambda x} + B\, e^{-\lambda x}$; la solution complète est donc de la forme : $y = A\, e^{\lambda x} + B\, e^{-\lambda x} - \dfrac{\mathcal{E}_0}{qE}$.

• Les conditions initiales correspondent à : $x(0) = 0$; $y(0) = 0$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{qEt}{p_0} = 0$. Les deux premières donnent : $A + B = \dfrac{\mathcal{E}_0}{qE}$; la troisième donne : $\dfrac{dy}{dx} = \lambda A\, e^{\lambda x} - \lambda B\, e^{-\lambda x} = \lambda.(A - B) = 0$ donc $A = B$.

• Finalement : $A = B = \dfrac{\mathcal{E}_0}{2qE}$ donc : $y = \dfrac{\mathcal{E}_0}{qE}.[\mathrm{ch}(\lambda x) - 1] = \dfrac{\mathcal{E}_0}{qE}.\left(\dfrac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2} - 1\right)$.

V. Accélération d'une particule chargée

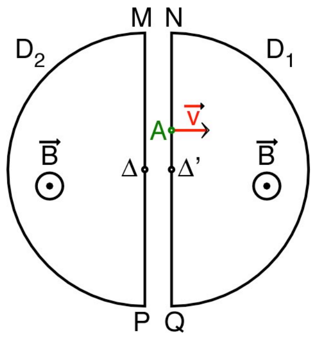
• En partant de : $\vec{p} = \dfrac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}$ on obtient : $\vec{F} = \vec{p}^{\bullet} = \dfrac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{a} + \dfrac{\mathcal{E}^{\bullet}}{c^2}\vec{v}$.

• D'après le théorème de l'énergie cinétique : $\mathcal{E}^{\bullet} = \vec{F}\cdot\vec{v} = q\vec{E}\cdot\vec{v}$; ceci donne donc :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} = \gamma\, m\vec{a} + q.(\vec{E}\cdot\frac{\vec{v}}{c})\frac{\vec{v}}{c}.$$

• On en déduit finalement : $\vec{a} = \dfrac{q}{m}\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}\ [\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} - (\vec{E}\cdot\dfrac{\vec{v}}{c})\ \dfrac{\vec{v}}{c}]$.

VI. Limite relativiste du cyclotron



1. • Le cyclotron est constitué par deux demi-cylindres creux, D_1 et D_2 (les “D”), séparés par un intervalle étroit. Un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ est créé dans D_1 et D_2, parallèlement aux axes Δ et Δ' des demi-cylindres (perpendiculaires au schéma). Un champ électrique $\vec{E}$ est créé dans l'intervalle étroit entre D_1 et D_2, perpendiculairement aux surfaces (représentées par MP et NQ) qui délimitent l'intervalle entre les “D”.

• Les particules soumises à l'accélération pénètrent en un point A du cyclotron, avec une vitesse $\vec{v}$ perpendiculaire à la surface représentée par NQ.

2. • Dans le cas considéré, la fréquence cyclotron est : $\nu_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{qB}{2\pi m}$ = 15,3 MHz.

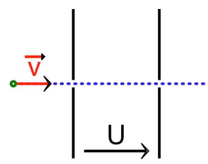
◊ remarque : on ne redémontre pas ici la formule “classique” car le schéma du raisonnement est analogue au cas relativiste envisagé à la question suivante.

3.a. • La force magnétique est perpendiculaire à la vitesse, donc elle ne travaille pas ; la vitesse est donc de norme constante pour le mouvement dans les “D” et γ est alors également constant.

• La relation fondamentale de la dynamique s'écrit ainsi : $\gamma m \ \dot{\vec{v}} = q\vec{v} \times \vec{B}$ et les équations différentielles du mouvement se déduisent du cas “classique” en remplaçant m par γm. On obtient par suite un mouvement circulaire à vitesse angulaire constante : $\omega = \dfrac{qB}{\gamma m} = \dfrac{\omega_0}{\gamma}$.

3.b. • Sachant que le cyclotron, alimenté à fréquence constante, ne fonctionne correctement que si la fréquence cyclotron ne varie pas plus de 2 à 3 %, l'énergie cinétique maximale correspond à $\gamma \approx 1{,}03$. On en déduit ainsi : $\mathcal{E}_{c_{max}} = (\gamma - 1)\, mc^2 \approx 28$ MeV pour des protons.

3.c. • De même : $\mathcal{E}_{c_{max}} = (\gamma - 1)\, mc^2 \approx 15$ keV pour des électrons.



3.d. • Le cyclotron est sans intérêt pour des électrons car une telle énergie cinétique correspond à l'accélération par une tension U = 15 kV, assez facilement obtenue dans un simple dispositif linéaire.

VII. Énergie d'une particule chargée dans un synchro-cyclotron

1. • La force magnétique est perpendiculaire à la vitesse, donc elle ne travaille pas ; la vitesse est donc de norme constante pour le mouvement dans les “D” et γ est alors également constant.

• L'énoncé dit que la trajectoire est circulaire, donc le mouvement est circulaire uniforme. En coordonnées polaires (avec l'origine au centre du cercle) : $\vec{p} = \gamma\, mv\vec{u}_\theta$ et $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \gamma\, mv\dot{\vec{u}}_\theta = -\gamma\, mv\omega\, \vec{u}_r = \gamma\, m\vec{a}$ (expression analogue au cas “classique” : $-mv\omega\, \vec{u}_r = m\vec{a}$).

• Mais par ailleurs, puisque le mouvement est circulaire : $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = -qvB\,\vec{u}_r$ donc : $qvB = \gamma\, mv\omega$ et $\omega = \dfrac{qB}{\gamma m}$.

• La quantité de mouvement est ainsi : $p = \gamma\, mv = qBR$ (puisque $\omega = \dfrac{v}{R}$) et l'énergie est donc :

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} = \sqrt{m^2c^4 + c^2.(qBR)^2}\ .$$

2. • Pour communiquer à des protons une énergie cinétique : $\mathcal{E}_c = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = 6\ \mathcal{E}_0$, donc une énergie : $\mathcal{E} = 7\ \mathcal{E}_0$, il faut un rayon : $R = \dfrac{\sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^{\,2}}}{cqB} = 21{,}7$ m.

VIII. Stabilité des trajectoires dans un accélérateur circulaire

1. • La vitesse peut s'écrire $\vec{v} = r^{\bullet}\,\overrightarrow{u_r} + r\theta^{\bullet}\,\overrightarrow{u_\theta} + z^{\bullet}\,\overrightarrow{u_z}$ et la force :

$$\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B} = q\,r\theta^{\bullet}\,B_z\,\overrightarrow{u_r} + q.(z^{\bullet}\,B_r - r^{\bullet}\,B_z)\,\overrightarrow{u_\theta} - q\,r\theta^{\bullet}\,B_r\,\overrightarrow{u_z}.$$

• L'accélération peut s'écrire $\vec{a} = (r^{\bullet\bullet} - r\theta^{\bullet 2})\,\overrightarrow{u_r} + (2r^{\bullet}\theta^{\bullet} + r\theta^{\bullet\bullet})\,\overrightarrow{u_\theta} + z^{\bullet\bullet}\,\overrightarrow{u_z}$ d'où les équations :

$$m.(r^{\bullet\bullet} - r\theta^{\bullet 2}) = q\,r\theta^{\bullet}\,B_z \quad ; \quad m\,z^{\bullet\bullet} = -\,q\,r\theta^{\bullet}\,B_r.$$

2.a. • Pour les faibles variations au voisinage du mouvement “de base”, on peut considérer que $\theta^{\bullet}$ est déterminé par la première approximation de l'équation radiale : $-m\,r_0\,\theta^{\bullet 2} \approx q\,r_0\,\theta^{\bullet}\,B_0$. Ceci correspond à l'approximation : $\theta^{\bullet} \approx -\dfrac{v_0}{r_0} \approx -\dfrac{qB_0}{m}$.

2.b. • La force magnétique, perpendiculaire à la vitesse, ne modifie pas la norme de celle-ci. En outre, l'existence d'une composante v_z non nulle ne modifie qu'au second ordre la relation entre $\theta^{\bullet}$ et v_0 (comme le cosinus de l'angle d'inclinaison). On en déduit : $\theta^{\bullet} \approx -\dfrac{v_0}{r} = -\dfrac{v_0}{r_0}\left(1 - \dfrac{\rho}{r_0}\right)$.

2.c. • En reportant dans l'équation en z, qui est déjà un terme du premier ordre, on peut ne garder que l'ordre zéro de l'approximation précédente :

$$z^{\bullet\bullet} - n\,\frac{qB_0}{m}\,z\,\theta^{\bullet} = 0 \quad ; \quad z^{\bullet\bullet} + n.\left(\frac{v_0}{r_0}\right)^2 z = 0.$$

• En reportant dans l'équation en ρ, on obtient au premier ordre (donc en négligeant le second ordre) :

$$\rho^{\bullet\bullet} - r\theta^{\bullet 2} - \frac{qB_0}{m}\,r\theta^{\bullet}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n = 0 \quad ; \quad \rho^{\bullet\bullet} - r.\left(\frac{v_0}{r_0}\right)^2\left(1 - 2\frac{\rho}{r_0}\right) + r.\left(\frac{v_0}{r_0}\right)^2\left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right)\left(1 - n\frac{\rho}{r_0}\right) = 0 \quad ;$$

$$\rho^{\bullet\bullet} + r.\left(\frac{v_0}{r_0}\right)^2 (1 - n)\,\frac{\rho}{r_0} = 0 \quad ; \quad \rho^{\bullet\bullet} + (1 - n)\left(\frac{v_0}{r_0}\right)^2 \rho = 0.$$

3. • Les équations du type précédent correspondent à des oscillations quand le coefficient constant du second terme est positif ; il correspond alors au carré de la pulsation. On obtient donc des oscillations au voisinage de la trajectoire initiale si et seulement si $0 < n < 1$ (la première condition pour z et la seconde pour ρ).

• Avec la pulsation initiale $\omega_0 = \dfrac{v_0}{r_0} = 2\pi\nu_0$, on obtient ainsi : $\nu_z = \sqrt{n}\;\nu_0$ et $\nu_r = \sqrt{1-n}\;\nu_0$.

IX. Désintégration d'un kaon

1.a. • La force magnétique est perpendiculaire à la vitesse, donc elle ne travaille pas ; la vitesse est donc de norme constante pour le mouvement dans le quart de circonférence et γ est alors également constant.

• L'énoncé dit que la trajectoire est une portion de cercle, donc le mouvement est circulaire uniforme. En coordonnées polaires (avec origine au centre) : $\vec{p} = \gamma\,mv\,\overrightarrow{u_\theta}$ et $\vec{F} = \vec{p}^{\,\bullet} = \gamma\,mv\,\overrightarrow{u_\theta}^{\,\bullet} = -\gamma\,mv\omega\,\overrightarrow{u_r} = \gamma\,m\,\vec{a}$ (expression analogue au cas “classique” : $-mv\omega\,\overrightarrow{u_r} = m\,\vec{a}$).

• Mais par ailleurs, puisque le mouvement est circulaire : $\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B} = -qvB\,\overrightarrow{u_r}$ donc : $qvB = \gamma\,mv\omega$ et $\omega = \dfrac{qB}{\gamma\,m}$.

• La quantité de mouvement est ainsi : $p = \gamma\,mv = qBR$ (puisque $\omega = \dfrac{v}{R}$). L'application numérique donne : $p = 5{,}76.10^{-19}$ kg.m.s^{-1} = 1080 MeV/c.

1.a. • L'énergie est donc : $\mathcal{E} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} = \sqrt{m^2c^4 + c^2.(qBR)^2} = 1{,}90.10^{-10}$ J = 1188 MeV.

• De la relation $\mathcal{E} = \gamma\, mc^2$ on tire alors : $v = c.\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2} = 2{,}73.10^8\ m.s^{-1}$.

◊ remarque : cela correspond à $\beta = \frac{v}{c} = 0{,}909$.

2. • Avec la vitesse v, la durée du parcours est : $t = \frac{L}{v} = 7{,}33$ ns.

• L'intervalle d'espace temps a une pseudo-norme invariante ; par conséquent, dans le référentiel où le déplacement est nul (référentiel “propre” au kaon), cette durée correspond à t_0 tel que : $c^2t^2 - L^2 = c^2t_0^2$. On obtient ainsi : $t_0 = \sqrt{t^2 - \frac{L^2}{c^2}} = 3{,}06$ ns.

• La probabilité d'observer des désintégrations est à chaque instant proportionnelle au nombre de kaons observés et proportionnelle à la durée d'observation : $dN = -k\, N\, dt$ (où k est une constante de proportionnalité). On en déduit une loi d'évolution du nombre de kaons de la forme : $N = N_0\, e^{-kt}$ correspondant à un nombre de désintégrations : $dN = -k\, N_0\, e^{-kt}\, dt$.

• La durée de vie moyenne est par définition : $\tau = \frac{\int t\, dN}{\int dN} = \frac{1}{k}$; donc le nombre de kaons restant évolue selon la loi : $N = N_0\, e^{-t/\tau}$ et après une durée de parcours t_0 (dans le référentiel propre), la proportion moyenne des kaons qui arrivent est : $\frac{N}{N_0} = e^{-t_0/\tau} = 78$ %.

X. Mouvement relativiste dans un champ en $1/r^2$

1. • La relation fondamentale de la dynamique peut s'écrire : $\vec{p}^{\bullet} = \vec{F}$, où $\vec{F}$ représente la résultante des forces appliquées au point matériel.

• En définissant le moment cinétique par $\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \times \vec{p}$ et le moment de $\vec{F}$ par $\vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{OM} \times \vec{F}$, on obtient : $\vec{\sigma}^{\bullet} = \vec{v} \times \vec{p} + \overrightarrow{OM} \times \vec{F} = \vec{\mathcal{M}}$.

• Pour une force centrale, dont le moment est nul, le moment cinétique est constant ; le mouvement s'effectue donc dans le plan passant par l'origine et perpendiculaire à $\vec{\sigma}$.

• En coordonnées polaires dans le plan du mouvement : $\overrightarrow{OM} = r\ \overrightarrow{u_r}$ et $\vec{v} = r^{\bullet}\ \overrightarrow{u_r} + r\theta^{\bullet}\ \overrightarrow{u_\theta}$; on en tire : $\vec{\sigma} = \gamma\ m\ r^2\theta^{\bullet}\ \overrightarrow{u_z}$ correspondant effectivement à $\sigma = \gamma\ m\ r^2\theta^{\bullet}$ constant (la méthode non relativiste se généralise sans difficulté).

2. • Avec les notations de Binet, on peut exprimer la vitesse : $\vec{v} = r^{\bullet}\ \overrightarrow{u_r} + r\theta^{\bullet}\ \overrightarrow{u_\theta} = \frac{\sigma}{\gamma m} [-\frac{du}{d\theta}\ \overrightarrow{u_r} + u\ \overrightarrow{u_\theta}]$ donc la quantité de mouvement : $\vec{p} = \gamma\, m\vec{v} = \sigma\, [-\frac{du}{d\theta}\ \overrightarrow{u_r} + u\ \overrightarrow{u_\theta}]$.

• On peut de même exprimer sa dérivée : $\vec{p}^{\bullet} = \frac{d\vec{p}}{d\theta}\theta^{\bullet} = -\frac{\sigma^2u^2}{\gamma m}.\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\overrightarrow{u_r}$ (l'expression se simplifie car la force est radiale).

◊ remarque : la méthode non relativiste se généralise assez simplement, mais il faut passer par la quantité de mouvement et non par l'accélération.

3.a. • La force électrostatique $\vec{F} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$ dérive de l'énergie potentielle $E_p = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (cette propriété est inchangée en relativité restreinte car elle est indépendante du mouvement).

• Le théorème de l'énergie cinétique donne alors : $dE = dE_c = \delta W = -dE_p$ ce qui correspond à considérer que la quantité $E_m = E + E_p = mc^2 + E_c - \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ est constante.

3.b. • La relation précédente peut s'écrire : $\gamma = \dfrac{E_m}{mc^2} + \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\ u$.

• La relation fondamentale de la dynamique $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ donne : $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = \gamma\ \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \sigma^2}$; contrairement au cas non relativiste, la relation ainsi obtenue dépend encore de la vitesse, donc ne donne pas l'équation de la trajectoire.

• La combinaison des deux peut par contre s'écrire sous la forme $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + \alpha^2 u = \dfrac{\alpha^2}{p}$ (indépendante de la vitesse, donc décrivant la trajectoire) en posant : $\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \sigma}\right)^2 \dfrac{1}{mc^2}}$; $\dfrac{\alpha^2}{p} = \dfrac{E_m}{mc^2}\ \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \sigma^2}$.

4.a. • Une solution particulière de l'équation complète (linéaire avec second membre constant) est la solution constante : $u = \dfrac{1}{p}$.

• Les solutions de l'équation homogène peuvent s'écrire sous la forme $u = \dfrac{e}{p}\cos(\alpha\theta)$ où $\dfrac{e}{p}$ est une constante d'intégration (écrite sous une forme permettant de mettre en facteur $\dfrac{1}{p}$).

• On obtient effectivement la solution générale $u = \dfrac{1}{p}.(1 + e\cos(\alpha\theta)]$.

4.b. • L'intervalle d'angle entre deux passages successifs au plus près du noyau ($\alpha\theta = 2k\pi$) correspond à $\alpha.(2\pi + \delta\theta) = 2\pi$. Ceci correspond à $\delta\theta = 2\pi.\left(\dfrac{1}{\alpha} - 1\right) > 0$ dans la mesure où $\alpha < 1$.

4.c. • Dans le cas $\alpha \approx 1$ on obtient : $\dfrac{1}{\alpha} \approx 1 + \left(\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \sigma}\right)^2 \dfrac{1}{2mc^2}$ donc : $\delta\theta \approx \left(\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \sigma}\right)^2 \dfrac{\pi}{mc^2}$.