FORCES RELATIVISTES - exercices

I. Théorème des moments

1. • Rappeler la démonstration du théorème du moment cinétique, par rapport à un point fixe choisi comme origine, dans de cas de la mécanique non relativiste.

2. a) Généraliser ce théorème dans l'espace-temps quadridimensionnel relativiste en utilisant les notations de coordonnées covariantes et contravariantes.

b) Montrer que la partie “spatiale” redonne l'équivalent du théorème du moment cinétique “classique”.

c) Montrer que la partie “spatio-temporelle” conduit à définir le centre d'inertie comme le barycentre des énergies : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum\left(E_i\,\overrightarrow{OA_i}\right)}{\sum E_i}$.

II. Mouvement avec une quadri-accélération de pseudo-norme constante

1. • Montrer que la quadri-accélération $\overleftrightarrow{a} = \dfrac{d\overleftrightarrow{U}}{d\tau}$ est orthogonale à la quadri-vitesse $\overleftrightarrow{U} = \dfrac{d\overleftrightarrow{OM}}{d\tau}$.

2. • On considère un point matériel en mouvement spatial rectiligne selon l'axe (Ox).

• En supposant que ce point est initialement immobile à l'origine, préciser les expressions initiales de la quadri-accélération et de sa pseudo-norme.

3. • Intégrer l'équation différentielle (quadratique) sur $\overleftrightarrow{a}(\tau)$, pour obtenir $\overleftrightarrow{U}(\tau)$, puis $\overleftrightarrow{OM}(\tau)$.

◊ indication : on peut utiliser les variables intermédiaires $\lambda = ct^{\bullet} - x^{\bullet}$ et $\mu = ct^{\bullet} + x^{\bullet}$.

III. Mouvement d'une particule dans un condensateur

• Une particule de masse m et de charge q entre, parallèlement à l'axe (Ox), dans un condensateur plan, de longueur L, où règne un champ électrique “uniforme” et constant $\vec{E}$, dirigé selon l'axe (Oy).

• À l'instant initial : $x = 0$, $y = 0$, $p_x = p_0$, $p_y = 0$.

1. • Déterminer p_x et p_y en fonction du temps t.

2. • Déterminer x et y en fonction du temps.

◊ indication : on peut remarquer que $\vec{p} = \dfrac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}$ et utiliser la notation $\mathcal{E}_0 = \sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2}$.

3. • Éliminer le temps t entre les relations précédentes et en déduire l'équation de la trajectoire.

4. a) À quelle condition cette trajectoire peut-elle être confondue avec la trajectoire “classique” (non relativiste) ?

b) Montrer que, pour qu'on puisse confondre ces deux trajectoires dans tout le condensateur, il faut que les deux conditions suivantes soient vérifiées : $p_0 \ll mc$ et $p_0 \gg \dfrac{qEL}{c}$.

c) Cette seconde condition n'a-t-elle pas un caractère paradoxal ?

IV. Théorème de l'énergie cinétique et trajectoire

• Une particule de masse m et de charge q entre, parallèlement à l'axe (Ox), dans un condensateur plan, de longueur L, où règne un champ électrique “uniforme” et constant $\vec{E}$, dirigé selon l'axe (Oy).

• À l'instant initial : $x = 0$, $y = 0$, $p_x = p_0$, $p_y = 0$.

1. • Déterminer p_x et p_y en fonction du temps t.

2. a) En considérant que $p_x = \gamma\, m \frac{dx}{dt}$ et $p_y = \gamma\, m \frac{dy}{dt}$, calculer $\frac{dy}{dx}$.

   b) Dériver cette expression par rapport à x et en déduire l'équation différentielle : $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\gamma\, qEm}{{p_0}^2}$.

3. • Avec éventuellement la notation $\mathcal{E}_0 = \sqrt{m^2c^4 + {p_0}^2c^2}$, relier γ à x en utilisant le théorème de l'énergie cinétique. En déduire l'équation de la trajectoire.

4. • Intégrer cette équation différentielle (en tenant compte des conditions initiales).

V. Accélération d'une particule chargée

• Une particule de masse m et de charge q est en mouvement dans une région de l'espace où règnent un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$. Calculer son accélération $\vec{a}$ en fonction de sa vitesse $\vec{v}$, de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$.

◊ indication : on peut remarquer que $\vec{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}$ et calculer $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ par le théorème de l'énergie cinétique.

VI. Limite relativiste du cyclotron

• Dans l'approximation de la mécanique “classique”, une particule de masse m et de charge q est en mouvement dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ “convenablement” orienté, décrit une trajectoire circulaire avec une vitesse angulaire $\omega_0 = \frac{qB}{m}$ (pulsation cyclotron) indépendante de la vitesse. C'est sur cette propriété qu'est basé le principe du cyclotron.

1. • Faire un schéma du cyclotron.

2. • Calculer la fréquence cyclotron ν_0 pour un proton dans un champ de norme $B = 1$ T.

3. a) Montrer (par un raisonnement rapide, sans complication inutile) que, dans le domaine relativiste, la vitesse angulaire est $\omega = \frac{\omega_0}{\gamma}$.

   b) Sachant que le cyclotron, alimenté à fréquence constante, ne fonctionne correctement que si la fréquence cyclotron ne varie pas plus que de 2 à 3%, calculer l'énergie cinétique maximale que peuvent acquérir des protons.

   c) Calculer de même l'énergie cinétique maximale que peuvent acquérir des électrons.

   d) Expliquer pourquoi le cyclotron est sans intérêt pour les électrons (on utilise un synchro-cyclotron ou un synchrotron, alimenté à une fréquence variable qui est ajustée en fonction de la “fréquence cyclotron” variable).

Données : $m(p) = 938{,}213$ MeV/c^2 ; $m(e^-) = 0{,}511$ MeV/c^2.

VII. Énergie d'une particule chargée dans un synchro-cyclotron

1. • Une particule de masse m et de charge q décrit une trajectoire circulaire de rayon R sous l'action d'un champ magnétique $\vec{B}$, uniforme sur la trajectoire de la particule. Exprimer l'énergie de la particule en fonction de m, c, q, B et R.

2. • La particule est accélérée progressivement et le rayon de la trajectoire augmente. Dans un champ magnétique $B = 1$ T, quel rayon doit-on donner à l'accélérateur (synchro-cyclotron) pour qu'il puisse communiquer à des protons une énergie cinétique $\mathcal{E}_c = 6\ \mathcal{E}_0$ (où $\mathcal{E}_0$ est l'énergie de masse) ?

Données : $m(p) = 938$ MeV/c^2.

VIII. Stabilité des trajectoires dans un accélérateur circulaire

• On étudie le mouvement relativiste de protons dans une région où règne un champ magnétique dont les coordonnées cylindriques sont de la forme : $B_r = -nB_0 \frac{z}{r}$; $B_\theta = 0$; $B_z = B_0 . \left(\frac{r_0}{r}\right)^n$.

◊ remarque : en tout point du plan (Oxy) le champ magnétique est parallèle à l'axe (Oz).

• Dans ce champ magnétique, les protons se déplacent à une vitesse v_0 sur une orbite circulaire de rayon r_0 située dans le plan (Oxy). On s'intéresse aux petits écarts des mouvements des protons par rapport à celle orbite.

1. • Établir les équations du mouvement, en projection sur les directions de $\vec{u_r}$ et $\vec{u_z}$.

2. • On pose $r = r_0 + \rho$ et on se limite aux écarts ρ et z petits par rapport à la trajectoire circulaire initiale.

   a) Montrer que la trajectoire circulaire initiale correspond à : $\dot{\theta} = -\frac{v_0}{r_0} = -\frac{qB_0}{m}$.

   b) Justifier qu'à l'ordre suivant : $\dot{\theta} \approx -\frac{v_0}{r_0}\left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right)$.

   c) En déduire que les équations décrivant les écarts peuvent s'écrire :

   $$\ddot{z} + n.\left(\frac{v_0}{r_0}\right)^2 z = 0 \quad ; \quad \ddot{\rho} + (1-n)\left(\frac{v_0}{r_0}\right)^2 \rho = 0.$$

3. • En déduire les valeurs de n qui permettent des petites oscillations radiales et axiales. Calculer les fréquences ν_r et ν_z en fonction de ν_0 (fréquence de rotation pour la trajectoire circulaire initiale).

IX. Désintégration d'un kaon

• On considère des particules de masse m et de charge q (ici des mésons K, aussi nommés “kaons”). Pour délimiter un “faisceau” bien rectiligne de ces particules, on leur impose de franchir des diaphragmes avant de pénétrer dans un quart de circonférence, de rayon R, où règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et constant, perpendiculaire au plan de la circonférence.

• Pour sélectionner des particules ayant une quantité de mouvement donnée, on place d'autres diaphragmes en sortie du dispositif.

1. a) Calculer littéralement la quantité de mouvement p (en norme) des mésons à la sortie de l'appareil.

   b) En déduire l'énergie $\mathcal{E}$ et la vitesse v pour :

   $B = 1{,}8$ T ; $R = 2{,}0$ m ; $q = 1{,}6.10^{-19}$ C ; $m = 495$ MeV/c^2.

2. • Les kaons sont instables et leur durée de vie moyenne, dans leur référentiel propre, est $\tau = 12{,}3$ ns. Ces mésons doivent parcourir, à la sortie de l'appareil précédent, une longueur $L = 2{,}0$ m avant de pénétrer dans la “chambre d'expérience” où ils interagissent avec des particules cible.

• Parmi les mésons issus du sélecteur de quantité de mouvement, quelle est la proportion moyenne des mésons qui arrivent à l'entrée de la chambre d'expérience ?

X. Mouvement relativiste dans un champ en $1/r^2$

◊ remarque : cet exercice ne donne qu'une idée approchée du problème réel, qui doit être traité dans le cadre de la mécanique quantique.

• Une charge Ze (où Z correspond à numéro atomique) est supposée fixe à l'origine du repère. Un électron de masse m et de charge -e est en mouvement dans le champ coulombien ainsi créé.

1. • Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique $\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \times \vec{p}$, ce qui se traduit par “l'intégrale première” (constante du mouvement) : $\sigma = \gamma\, m\, r^2\dot{\theta}$.

2. • En éliminant le temps à l'aide de σ, montrer que : $\dot{\vec{p}} = -\dfrac{\sigma^2 u^2}{\gamma\, m} . \left(\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) \vec{u_r}$ en notant $u = \dfrac{1}{r}$.

3. a) Montrer que le théorème de l'énergie cinétique donne l'intégrale première (quantité constante lors du mouvement) : $E_m = mc^2 + E_c - \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

b) Utiliser ce résultat pour éliminer γ de l'équation définissant la trajectoire.

4. a) Montrer qu'une solution du type : $u = \dfrac{1}{p}.(1 + e\cos(\alpha\theta))$ peut convenir, où α, p et e sont des constantes (le cas $\alpha = 1$ correspond à une ellipse).

b) Dans le cas étudié, α est légèrement inférieur à 1 ; montrer qu'une telle équation peut être considérée comme celle d'une ellipse dont les axes tournent à chaque tour d'un angle : $\delta\theta = 2\pi.\left(\dfrac{1}{\alpha} - 1\right)$.

c) Calculer δθ en fonction de σ dans le cas où α est peu différent de 1.