GRAVITATION RELATIVISTE - corrigé des exercices

I. Pesanteur d'un photon

1.a. • En mécanique non relativiste, l'attraction newtonienne d'une masse m par un astre de masse M peut s'écrire : $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}\,\vec{u_r}$ où $\vec{u_r}$ est un vecteur unitaire orienté selon la direction radiale de M vers m.

1.b. • Les expériences montrent que la masse inerte et la masse pesante correspondent à une seule et même grandeur physique ; si la grandeur procédant la propriété d'inertie est l'énergie, ou plus précisément $\gamma\, m = \frac{E}{c^2}$, il semble “logique” (en supposant que l'astre attracteur est quasi-immobile, à l'origine du repère) de proposer comme généralisation la loi : $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}M\gamma m}{r^2}\,\vec{u_r}$.

◊ remarque : si le mouvement est radial, cette généralisation peut être justifiée par le principe de moindre action, avec un terme d'interaction $\mathcal{S}_{int} = \frac{1}{c}\int \mathcal{A}\, ds$ avec $\mathcal{A} = mc^2.\left(1 - \exp\left(-\frac{\mathcal{G}M}{c^2 r}\right)\right)$; on montre par contre que, pour un mouvement quelconque, la force généralisée ne peut pas être toujours radiale.

1.c. • La force précédente dépend de la position et de la vitesse ; pour un même déplacement total, son travail dépend donc en général du déplacement particulier effectué (y compris de la vitesse à laquelle ce déplacement est effectué). Il est donc a priori impossible d'exprimer ce travail à partir d'une énergie potentielle qui, par définition, doit ne dépendre que de la position.

◊ remarque : ceci n'interdit pas certains raisonnements sur l'énergie, à condition de les généraliser de façon appropriée ; ainsi, pour un mouvement radial, on peut utiliser $E_p = \gamma\, mc^2.\left(\exp\left(-\frac{\mathcal{G}M}{c^2 r}\right) - 1\right)$.

2.a. • La relation fondamentale de la dynamique donne (algébriquement) : $\frac{dp}{dt} = -\frac{\mathcal{G}\gamma Mm}{r^2} = -\frac{\mathcal{G}M}{c^2 r^2}E$.

• Par ailleurs : $dr = v\, dt$; ceci permet d'écrire : $\frac{v}{E}dp = -\frac{\mathcal{G}M}{c^2 r^2}dr$.

• Or $p = \gamma mv = \frac{Ev}{c^2}$ correspond à : $\frac{v}{E} = \frac{p}{m^2c^2 + p^2}$; par suite : $\frac{p\, dp}{m^2c^2 + p^2} = -\frac{\mathcal{G}M}{c^2}\frac{dr}{r^2}$.

2.b. • L'intégration donne : $\log(m^2c^2 + p^2) = \frac{2\mathcal{G}M}{c^2 r} + \log(m^2c^2 + p_0^2)$.

• Ceci peut encore s'écrire : $E = E_0 \exp\left(\frac{\mathcal{G}M}{c^2 r}\right)$ où E_0 désigne l'énergie initiale (et non l'énergie au repos mc^2).

2.c. • Pour un photon, la relation fondamentale donne : $\frac{d(h\nu)}{c\,dt} = \frac{\mathcal{G}M}{r^2}\frac{h\nu}{c^2}$ avec $dr = -c\, dt$.

• Ceci peut s'écrire : $\frac{d(h\nu)}{h\nu} = -\frac{\mathcal{G}M}{c^2}\frac{dr}{r^2}$; on en tire : $E = h\nu = h\nu_0 \exp\left(\frac{\mathcal{G}M}{c^2 r}\right) = E_0 \exp\left(\frac{\mathcal{G}M}{c^2 r}\right)$.

◊ remarque : si l'effet est faible, on peut écrire : $E \approx E_0.\left(1 + \frac{R_s}{2r}\right)$ où $R_s = \frac{2\mathcal{G}M}{c^2}$ est généralement nommé “rayon de Schwarzschild” de l'astre ; ce résultat correspond aussi à l'approximation obtenue en relativité générale dans la limite des faibles effets.

2.d. • De façon analogue : $E = h\nu = h\nu_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{G}M}{c^2 R}\right)\exp\left(\frac{\mathcal{G}M}{c^2 r}\right) = E_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{G}M}{c^2 R}\right)\exp\left(\frac{\mathcal{G}M}{c^2 r}\right)$.

• Pour qu'il existe une condition limite il faudrait que, lorsque r augmente, l'énergie du photon tende vers zéro avant d'atteindre l'infini. Au contraire, on constate que le photon peut atteindre l'infini avec une énergie $E = E_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{G}M}{c^2R}\right)$; ce modèle n'a donc pas de solutions de type “trou noir” (à la limite, pour un astre “très compact”, on obtient une “quasi singularité ponctuelle”).

3. • Dans le modèle envisagé ici, on peut considérer qu'un train d'onde limité en durée peut être décrit (d'après la transformée de Fourier) comme une superposition d'ondes “infinies” dans une “bande de fréquence” $\Delta\nu_0$. Puisque toutes les fréquences subissent le même effet, il en est de même de la largeur de bande (dans les mêmes proportions), donc le nombre de périodes à l'arrivée est inchangé.

• D'une part on reçoit donc des tains d'ondes de N périodes $T' = T_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{G}M}{c^2r}\right) \approx T_0.\left(1-\frac{\mathcal{G}M}{c^2r}\right)$, avec un terme correctif conforme à l'expérience, mais reçus à intervalles réguliers $\Delta t'_N = \Delta t_N = 2NT$ puisque les intervalles entre débuts d'émission n'ont ici aucune raison d'être modifiés (donc la durée entre deux réceptions devient supérieure à la durée d'un train d'onde).

• Cette dernière propriété, contraire à l'expérience, conduit à penser que la relativité restreinte est inadaptée pour décrire les phénomènes gravitationnels (d'où la recherche d'une théorie plus efficace : la relativité générale).

II. Pesanteur d'un photon

1.a. • En mécanique non relativiste, l'attraction newtonienne d'une masse m par un astre de masse M peut être associée à l'énergie potentielle : $E_p = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r}$.

1.b. • Les expériences montrent que la masse inerte et la masse pesante correspondent à une seule et même grandeur physique ; si la grandeur procédant la propriété d'inertie est l'énergie, ou plus précisément $\gamma m = \frac{E}{c^2}$, on peut proposer comme énergie “potentielle” généralisée : $E_p = -\frac{\mathcal{G}M\gamma m}{r}$.

◊ remarque : cette généralisation peut être justifiée à l'aide du principe de moindre action, en considérant un terme d'interaction $\mathcal{S}_{int} = \frac{1}{c}\int \mathcal{A}\, ds$ avec $\mathcal{A} = \frac{\mathcal{G}Mm}{r}$; si le mouvement est radial, on obtient alors pour l'expression de la force : $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}\gamma Mm}{r^2}\,\frac{1}{1-\frac{\mathcal{G}M}{c^2r}}\,\vec{u_r}$.

2.a. • Puisque $E = \gamma\, mc^2$, l'hypothèse d'une conservation de l'énergie donne : $E - \frac{E}{mc^2}\frac{\mathcal{G}Mm}{r} = E_0$ où E_0 désigne <u>l'énergie initiale</u> (et non l'énergie au repos mc^2) ; ainsi : $E = \frac{E_0}{1-\frac{\mathcal{G}M}{c^2r}}$.

◊ remarque : si l'effet est faible, on peut écrire : $E \approx E_0.\left(1+\frac{R_s}{2r}\right)$ où $R_s = \frac{2\mathcal{G}M}{c^2}$ est généralement nommé “rayon de Schwarzschild” de l'astre ; ce résultat correspond aussi à l'approximation obtenue en relativité générale dans la limite des faibles effets.

2.b. • De façon analogue : $E = h\nu = h\nu_0\,\frac{1-\frac{R_s}{2R}}{1-\frac{R_s}{2r}} = E_0\,\frac{1-\frac{R_s}{2R}}{1-\frac{R_s}{2r}}$.

• Pour qu'il existe une condition limite il faudrait que, lorsque r augmente, l'énergie du photon tende vers zéro avant d'atteindre l'infini.

• Au contraire :

◊ si $R > \frac{R_s}{2}$ alors E décroît quand r augmente, mais tend vers $E_0.\left(1-\frac{R_s}{2R}\right) > 0$;

◊ si $R < \frac{R_s}{2}$ alors E croît vers l'infini quand r augmente et tend vers $\frac{R_s}{2}$.

• Ce modèle n'a donc pas de solutions de type “trou noir” (tout se passe comme si l'objet attracteur était non pas l'astre mais la singularité associée à $r = \frac{R_s}{2}$).

◊ remarque : ceci correspond aussi au changement de sens de la force (qu'on peut déduire, entre autres, du principe de moindre action).

III. Avance du périhélie

1. • La relation fondamentale de la dynamique peut s'écrire : $\vec{p}^{\bullet} = \vec{F}$, où $\vec{F}$ représente la résultante des forces appliquées au point matériel (noté N).

• En définissant le moment cinétique par $\vec{\sigma} = \overrightarrow{ON}\times\vec{p}$ et le moment de $\vec{F}$ par $\vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{ON}\times\vec{F}$, on obtient : $\vec{\sigma}^{\bullet} = \vec{v}\times\vec{p} + \overrightarrow{ON}\times\vec{F} = \vec{\mathcal{M}}$.

• Pour une force centrale, dont le moment est nul, le moment cinétique est constant ; le mouvement s'effectue donc dans le plan passant par l'origine et perpendiculaire à $\vec{\sigma}$.

• En coordonnées polaires dans le plan du mouvement : $\overrightarrow{ON} = r\ \overrightarrow{u_r}$ et $\vec{v} = r^{\bullet}\ \overrightarrow{u_r} + r\theta^{\bullet}\ \overrightarrow{u_\theta}$; on en tire : $\vec{\sigma} = \gamma\ m\ r^2\theta^{\bullet}\ \overrightarrow{u_z}$ correspondant effectivement à $\sigma = \gamma\ m\ r^2\theta^{\bullet}$ constant (la méthode non relativiste se généralise sans difficulté).

2. • Avec les notations de Binet, on peut exprimer la vitesse : $\vec{v} = r^{\bullet}\ \overrightarrow{u_r} + r\theta^{\bullet}\ \overrightarrow{u_\theta} = \frac{\sigma}{\gamma m}\ [-\frac{du}{d\theta}\ \overrightarrow{u_r} + u\ \overrightarrow{u_\theta}]$ donc la quantité de mouvement : $\vec{p} = \gamma\ m\vec{v} = \sigma\ .\ [-\frac{du}{d\theta}\ \overrightarrow{u_r} + u\ \overrightarrow{u_\theta}]$.

• On peut de même exprimer sa dérivée : $\vec{p}^{\bullet} = \frac{d\vec{p}}{d\theta}\theta^{\bullet} = -\frac{\sigma^2u^2}{\gamma m}.\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)\overrightarrow{u_r}$ (l'expression se simplifie car la force est radiale).

◊ remarque : la méthode non relativiste se généralise assez simplement, mais il faut passer par la quantité de mouvement et non par l'accélération.

3. • La relation fondamentale de la dynamique donne : $\frac{d^2u}{d\theta^2}+u = \gamma^2\ \frac{\mathcal{G}M}{\Gamma^2}$ en posant $\Gamma = \frac{\sigma}{m}$ constante correspondant à la généralisation relativiste de la “loi des aires” (ici la vitesse aréolaire $\frac{1}{2}r^2\theta^{\bullet}$ n'est pas constante).

• D'après la question (2), la vitesse vérifie : $v^2 = \frac{\Gamma^2}{\gamma^2}.\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right) = \Gamma^2.\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right)$. On en déduit : $\gamma^2 = 1 + \frac{\Gamma^2}{c^2}.\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right)$.

• L'équation est donc finalement : $\frac{d^2u}{d\theta^2}+u = \frac{\mathcal{G}M}{\Gamma^2} + \frac{\mathcal{G}M}{c^2}.\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right)$.

◊ remarque : dans l'approximation au premier ordre, le terme correctif déduit de la relativité générale correspond à : $\frac{d^2u}{d\theta^2}+u = \frac{\mathcal{G}M}{\Gamma^2} + \frac{\mathcal{G}M}{c^2}.3u^2$.

4. • L'équation obtenue donne : $\frac{1}{p} + \frac{2e\varepsilon}{p}\cos((1-\varepsilon)\ \theta) \approx \frac{\mathcal{G}M}{\Gamma^2} + \frac{\mathcal{G}M}{c^2p^2} + 2e\frac{\mathcal{G}M}{c^2p^2}\cos((1-\varepsilon)\ \theta)$.

• Par identification on obtient : $\varepsilon \approx \left(\frac{\mathcal{G}M}{c\Gamma}\right)^2$ et $\frac{1}{p} \approx \frac{\mathcal{G}M}{\Gamma^2}(1+\varepsilon)$.

◊ remarque : la relativité générale donne $\varepsilon \approx 3\left(\frac{\mathcal{G}M}{c\Gamma}\right)^2$.

• Chaque “période” du mouvement radial correspond à une augmentation $\Delta\theta \approx 2\pi.(1+\varepsilon)$, ce qui correspond à une avance du périhélie.

IV. Avance du périhélie

1. • La relation fondamentale de la dynamique peut s'écrire : $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, où $\vec{F}$ représente la résultante des forces appliquées au point matériel (noté N).

• En définissant le moment cinétique par $\vec{\sigma} = \overrightarrow{ON} \times \vec{p}$ et le moment de $\vec{F}$ par $\vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{ON} \times \vec{F}$, on obtient : $\dot{\vec{\sigma}} = \vec{v} \times \vec{p} + \overrightarrow{ON} \times \vec{F} = \vec{\mathcal{M}} = -\frac{\mathcal{G}M\gamma m}{c^2 r}\, v_\theta\, v_r\, \vec{u_z}$.

◊ remarque : la force considérée n'est pas centrale (son moment n'est pas nul), mais elle reste selon le plan de $\vec{u_r}$ et $\vec{v}$; c'est pourquoi l'énoncé indique que le mouvement s'effectue dans un plan et donne l'expression en coordonnées polaires.

• En coordonnées polaires dans le plan du mouvement : $\overrightarrow{ON} = r\,\vec{u_r}$ et $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$; on en tire : $\vec{\sigma} = \gamma\, m\, r^2\dot{\theta}\,\vec{u_z}$ correspondant à : $\dot{\sigma} = (\gamma\, m\, r^2\dot{\theta})^{\cdot} = -\frac{\mathcal{G}M\gamma m}{c^2}\,\dot{r}\,\dot{\theta}$.

• Cette équation peut s'écrire : $\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = -\frac{\mathcal{G}M}{c^2}\frac{\dot{r}}{r^2}$; on en déduit que : $\Sigma = \sigma\,.\,\exp\left(-\frac{\mathcal{G}M}{c^2 r}\right)$ est constant (la méthode non relativiste se généralise).

2. • Avec les notations de Binet, on peut exprimer la vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} = \frac{\sigma}{\gamma m}\,[-\frac{du}{d\theta}\,\vec{u_r} + u\,\vec{u_\theta}]$ donc la quantité de mouvement : $\vec{p} = \gamma\, m\vec{v} = \sigma\,.\,[-\frac{du}{d\theta}\,\vec{u_r} + u\,\vec{u_\theta}]$.

• On peut de même exprimer sa dérivée : $\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{d\theta}\dot{\theta} = -\frac{\sigma^2u^2}{\gamma m}.\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)\vec{u_r} + \dot{\sigma}\,.\,[-\frac{du}{d\theta}\,\vec{u_r} + u\,\vec{u_\theta}]$ avec $\dot{\sigma} = -\frac{\mathcal{G}M}{c^2}\frac{\dot{r}}{r^2}\,\sigma = \frac{\mathcal{G}M}{c^2}\frac{\sigma^2u^2}{\gamma m}\frac{du}{d\theta}$.

• Ainsi : $\dot{\vec{p}} = -\frac{\sigma^2u^2}{\gamma m}.\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)\vec{u_r} + \frac{\mathcal{G}M}{c^2}\frac{\sigma^2u^2}{\gamma m}\frac{du}{d\theta}\,.\,[-\frac{du}{d\theta}\,\vec{u_r} + u\,\vec{u_\theta}]$.

◊ remarque : la méthode non relativiste se généralise en passant par la quantité de mouvement et non par l'accélération ; ici la force n'est pas radiale.

3. • En procédant de façon analogue, la relation fondamentale de la dynamique donne :

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} = -\mathcal{G}M\,\gamma\, m\, u^2.\left(\left(1-\frac{r^2\dot{\theta}^2}{c^2}\right)\vec{u_r} + \frac{r\dot{r}\dot{\theta}}{c^2}\vec{u_\theta}\right) = -\mathcal{G}M\,\gamma\, m\, u^2.\left(\left(1-\frac{\sigma^2u^2}{\gamma^2m^2c^2}\right)\vec{u_r} + \frac{\sigma^2u}{\gamma^2m^2c^2}\frac{du}{d\theta}\vec{u_\theta}\right).$$

• La comparaison avec l'expression de la question précédente montre que les composantes orthoradiales sont identiques ; la correspondance des composantes radiales impose :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u = \mathcal{G}M\frac{\gamma^2m^2}{\sigma^2} - \frac{\mathcal{G}M}{c^2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right).$$

• D'après la question (2), la vitesse vérifie : $v^2 = \frac{\sigma^2}{\gamma^2m^2}.\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right) = \frac{\sigma^2}{m^2}.\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right)$. On en déduit : $\gamma^2 = 1 + \frac{\sigma^2}{m^2c^2}.\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right)$.

• L'équation est donc finalement : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \mathcal{G} M \frac{m^2}{\sigma^2}$; c'est exactement la même formulation que dans le cas non relativiste, sauf qu'ici le moment cinétique n'est pas constant : $\sigma = \Sigma \,.\, \exp\left(\frac{\mathcal{G}M}{c^2} u\right)$.

• On peut aussi écrire $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mathcal{G}M}{\Gamma'^2} \exp\left(-2\frac{\mathcal{G}M}{c^2} u\right)$ en posant $\Gamma' = \frac{\Sigma}{m}$ constante correspondant à la généralisation relativiste de la “loi des aires” (ici la vitesse aréolaire $\frac{1}{2} r^2 \theta^\bullet$ n'est pas constante).

◊ remarque : dans l'approximation au premier ordre, le terme correctif déduit de la relativité générale correspond à : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mathcal{G}M}{\Gamma'^2} + \frac{\mathcal{G}M}{c^2} . 3u^2$.

4. • L'équation obtenue donne au premier ordre : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \approx \frac{\mathcal{G}M}{\Gamma'^2}\left(1 - 2\frac{\mathcal{G}M}{c^2} u\right)$; ceci peut encore s'écrire sous la forme : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + \lambda^2 u \approx \frac{\mathcal{G}M}{\Gamma'^2}$ avec $\lambda^2 = 1 + 2\left(\frac{\mathcal{G}M}{c\Gamma'}\right)^2$.

• Les solutions sont de la forme : $u = \frac{1}{p}[1 + e \cos(\lambda\,\theta)]$ avec $\frac{1}{p} \approx \frac{\mathcal{G}M}{\lambda^2 \Gamma'^2}$; la comparaison donne en outre : $\lambda = 1 - \varepsilon \approx 1 + \left(\frac{\mathcal{G}M}{c\Gamma'}\right)^2$ donc : $\varepsilon \approx -\left(\frac{\mathcal{G}M}{c\Gamma'}\right)^2$.

◊ remarque : la relativité générale donne $\varepsilon = 3\left(\frac{\mathcal{G}M}{c\Gamma}\right)^2$; mis à part le signe contraire, la comparaison nécessite de considérer (en moyenne) : $\Gamma' \approx \Gamma \,.\, \left(1 - \frac{\mathcal{G}M}{c^2}\langle u \rangle\right) \approx \Gamma$ à l'approximation du premier ordre.

• Chaque “période” du mouvement radial correspond à une augmentation $\Delta\theta \approx 2\pi.(1 + \varepsilon)$, ce qui correspond à un retard du périhélie.

V. Avance du périhélie

1. • La relation fondamentale de la dynamique peut s'écrire : $\vec{p}^\bullet = \vec{F}$, où $\vec{F}$ représente la résultante des forces appliquées au point matériel (noté N).

• En définissant le moment cinétique par $\vec{\sigma} = \overrightarrow{ON} \times \vec{p}$ et le moment de $\vec{F}$ par $\vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{ON} \times \vec{F}$, on obtient : $\vec{\sigma}^\bullet = \vec{v} \times \vec{p} + \overrightarrow{ON} \times \vec{F} = \vec{\mathcal{M}} = -\frac{\mathcal{G}M\gamma m}{c^2 r} \frac{1}{1 - \frac{\mathcal{G}M}{c^2 r}} v_\theta\, v_r\, \vec{u_z}$.

◊ remarque : la force considérée n'est pas centrale (son moment n'est pas nul), mais elle reste selon le plan de $\vec{u_r}$ et $\vec{v}$; c'est pourquoi l'énoncé indique que le mouvement s'effectue dans un plan et donne l'expression en coordonnées polaires.

• En coordonnées polaires dans le plan du mouvement : $\overrightarrow{ON} = r\,\vec{u_r}$ et $\vec{v} = r^\bullet\,\vec{u_r} + r\theta^\bullet\,\vec{u_\theta}$; on en tire : $\vec{\sigma} = \gamma\, m\, r^2 \theta^\bullet\, \vec{u_z}$ correspondant à : $\sigma^\bullet = (\gamma\, m\, r^2\theta^\bullet)^\bullet = -\frac{\mathcal{G}M\gamma m}{c^2} \frac{1}{1 - \frac{\mathcal{G}M}{c^2 r}} r^\bullet\, \theta^\bullet$.

• En notant $\alpha = \frac{\mathcal{G}M}{c^2}$, cette équation peut s'écrire : $\frac{\sigma^\bullet}{\sigma} = -\alpha \frac{r^\bullet}{r.(r-\alpha)} = \frac{r^\bullet}{r} - \frac{r^\bullet}{r-\alpha}$; on en déduit que : $\Sigma = \sigma \,.\, \left(1 - \frac{\mathcal{G}M}{c^2 r}\right)$ est constant (la méthode non relativiste se généralise).

2. • Avec les notations de Binet, on peut exprimer la vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} = \frac{\sigma}{\gamma m}\left[-\frac{du}{d\theta}\overrightarrow{u_r} + u\,\overrightarrow{u_\theta}\right]$ et l'énergie mécanique : $E_m = \gamma\, mc^2 . \left(1-\frac{\mathcal{G}M}{c^2}u\right)$.

• On obtient en dérivant : $\frac{\gamma}{mc^2}\frac{dE_m}{du} = \gamma\frac{d\gamma}{du}.\left(1-\frac{\mathcal{G}M}{c^2}u\right) - \frac{\mathcal{G}M}{c^2}\gamma^2$.

◊ remarque : la méthode non relativiste peut aussi se généraliser en passant par l'énergie ; ici la force n'est pas radiale.

3. • D'après la question (2), la vitesse vérifie : $v^2 = \frac{\sigma^2}{\gamma^2 m^2}.\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) = \frac{\sigma^2}{m^2}.\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right)$. On en déduit : $\gamma^2 = 1 + \frac{\sigma^2}{m^2c^2}.\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right)$.

• On en déduit : $\gamma\frac{d\gamma}{du} = \frac{\sigma^2}{m^2c^2}.\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) + \frac{\sigma}{m^2c^2}\frac{d\sigma}{du}.\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right)$.

• La relation $\sigma = \frac{\Sigma}{1-\frac{\mathcal{G}M}{c^2}u}$ donne $\frac{d\sigma}{du} = \sigma\,\frac{\mathcal{G}M}{c^2}\,\frac{1}{1-\frac{\mathcal{G}M}{c^2}u}$; en outre $\frac{dE_m}{du} = 0$. On en déduit ainsi après simplification : $\left(1-\frac{\mathcal{G}M}{c^2}u\right)\frac{\sigma^2}{m^2c^2}.\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) - \frac{\mathcal{G}M}{c^2} = 0$.

• L'équation est donc finalement : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \mathcal{G}M\frac{1}{1-\frac{\mathcal{G}M}{c^2}u}\,\frac{m^2}{\sigma^2}$; c'est une formulation analogue à celle du cas non relativiste, sauf qu'ici le moment cinétique n'est pas constant : $\sigma = \frac{\Sigma}{1-\frac{\mathcal{G}M}{c^2}u}$.

• On peut aussi écrire $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mathcal{G}M}{\Gamma'^2}.\left(1-\frac{\mathcal{G}M}{c^2}u\right)$ en posant $\Gamma' = \frac{\Sigma}{m}$ constante correspondant à la généralisation relativiste de la “loi des aires” (ici la vitesse aréolaire $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ n'est pas constante).

◊ remarque : dans l'approximation au premier ordre, le terme correctif déduit de la relativité générale correspond à : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mathcal{G}M}{\Gamma'^2} + \frac{\mathcal{G}M}{c^2}.3u^2$.

4. • L'équation obtenue peut s'écrire sous la forme : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + \lambda^2 u \approx \frac{\mathcal{G}M}{\Gamma'^2}$ avec $\lambda^2 = 1 + \left(\frac{\mathcal{G}M}{c\Gamma'}\right)^2$.

• Les solutions sont de la forme : $u = \frac{1}{p}[1 + e\cos(\lambda\,\theta)]$ avec $\frac{1}{p} \approx \frac{\mathcal{G}M}{\lambda^2\Gamma'^2}$; la comparaison donne en outre : $\lambda = 1 - \varepsilon \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{G}M}{c\Gamma'}\right)^2$ donc : $\varepsilon \approx -\frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{G}M}{c\Gamma'}\right)^2$.

◊ remarque : la relativité générale donne $\varepsilon = 3\left(\frac{\mathcal{G}M}{c\Gamma}\right)^2$; mis à part le signe contraire, la comparaison nécessite de considérer (en moyenne) : $\Gamma' \approx \Gamma . \left(1-\frac{\mathcal{G}M}{c^2}\langle u\rangle\right) \approx \Gamma$ à l'approximation du premier ordre.

• Chaque “période” du mouvement radial correspond à une augmentation $\Delta\theta \approx 2\pi.(1 + \varepsilon)$, ce qui correspond à un retard du périhélie.

VI. Déviation d'un photon

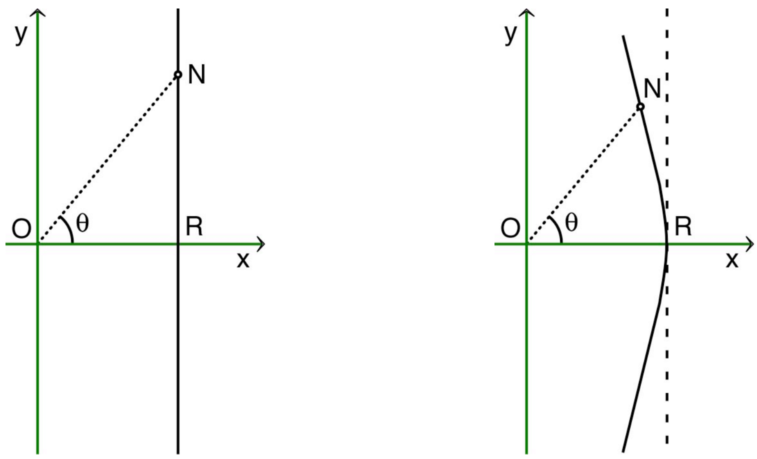
1. • Pour traiter le cas d'un photon, on peut faire tendre la masse vers zéro, sachant que l'énergie $E = \gamma mc^2$ (γ tend vers l'infini si v tend vers c) est alors remplacée par $E = h\nu$.

• On constate que $\Gamma = \frac{\sigma}{m} \approx \frac{h\nu\, r^2\dot{\theta}}{m}$ tend vers l'infini, donc $\frac{\mathcal{G}M}{\Gamma^2}$ tend vers zéro.

2.a. • D'après le schéma ci-après : $R = r\cos(\theta)$ donc $u = \frac{\cos(\theta)}{R}$.

• Cette expression est effectivement solution de la limite non relativiste, qui correspond à c tendant vers l'infini : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0$.

2.b. • Le second membre de l'équation décrit le terme relativiste, faible correction de l'équation newtonienne ; remplacer dans ce terme correctif la solution approchée consiste à négliger une correction de correction (terme du second ordre).



2.c. • L'équation donne : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mathcal{G}M}{c^2R^2}.(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) = \frac{\mathcal{G}M}{c^2R^2}$.

• La solution correspond à : $u = \frac{\cos(\theta)}{R} + \frac{\mathcal{G}M}{c^2R^2}$; avec $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ on obtient après simplification : $x = R - \frac{\mathcal{G}M}{c^2R}\sqrt{x^2+y^2}$.

2.d. • Les limites correspondent à y tendant vers l'infini : $x \approx -\frac{\mathcal{G}M}{c^2R}\,|y|$; ceci donne une déviation (variation de direction) : $\alpha = \Delta\theta - \pi \approx 2\frac{\mathcal{G}M}{c^2R}$.

◊ remarque : la relativité générale donne une déviation deux fois plus grande.

◊ remarque : pour le mouvement faiblement dévié, on peut confondre la distance minimale d'approche R et la distance entre O et les asymptotes de la trajectoire.

◊ remarque : cette solution, “classiquement” considérée comme expression de la déviation des photons pour le modèle de relativité restreinte, est toutefois incohérente ; on généralise la formule de l'énergie d'une façon acceptable, mais sans se préoccuper de ce que cela impose pour la force : l'invariance relativiste fait que la force généralisée ne peut pas être toujours radiale ; la non conservation du moment cinétique qui en découle modifie le résultat de façon fondamentale.