# GRAVITATION RELATIVISTE - exercices

## I. Pesanteur d'un photon

1. a) Rappeler l'expression de la loi de force de Newton en mécanique non relativiste, pour l'attraction d'une masse m par un astre de masse M.

b) En relativité restreinte, le centre d'inertie est le barycentre des énergies : $\overrightarrow{OG} = \frac{\sum\left(E_i \, \overrightarrow{OA_i}\right)}{\sum E_i}$ (avec en particulier une contribution des photons, pourtant de masse nulle). Justifier qu'on peut en déduire, comme généralisation “logique” de la loi de force de Newton en relativité restreinte, l'expression : $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G} M \gamma m}{r^2} \, \overrightarrow{u_r}$.

c) Cette force dérive-t-elle d'une énergie potentielle ?

2. • On considère une particule de masse m, soumise à l'attraction d'un astre de masse M. Cette particule part de l'infini vers l'astre, avec une vitesse initiale $v_0$ (le mouvement est rectiligne dans la direction radiale).

a) En raisonnant avec l'expression précédente de la force, montrer que l'équation différentielle du mouvement correspondant peut s'écrire en fonction des variables p et r sous la forme :

$$\frac{p \, dp}{m^2c^2 + p^2} = -\frac{\mathcal{G}M}{c^2} \frac{dr}{r^2}.$$

b) Intégrer cette équation différentielle.

c) Montrer que le cas d'un photon, d'énergie $E = h\nu$ et de quantité de mouvement $p = -\frac{h\nu}{c}$ (algébriquement), avec une fréquence initiale $\nu_0$, est en accord avec la limite du cas précédent (et d'ailleurs plus facile à intégrer).

d) Inversement, on considère un photon partant de la surface d'un astre de rayon R. Existe-t-il une condition sur M et R telle que le photon ne puisse pas rejoindre l'infini (modèle de “trou noir”) ?

3. • On considère l'émission d'une succession de photons représentés par des “trains d'onde” de N périodes $T_0$, émis depuis l'infini à intervalles réguliers $\Delta t_N = 2NT_0$ (la durée entre deux émissions est égale à la durée d'un train d'onde).

• En relativité générale, lors de la propagation pour atteindre le rayon r, toutes ces durées subissent une “contraction” (due à la courbure de l'espace-temps) d'un facteur : $1 - \frac{\mathcal{G}M}{c^2 r}$. L'allure relative est ainsi conservée à l'arrivée : des tains d'ondes de N périodes T’, reçus à intervalles réguliers $\Delta t'_N = 2NT'$.

• Qu'en est-il dans le modèle étudié ici ?

## II. Pesanteur d'un photon

1. a) Rappeler l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle en mécanique non relativiste, pour l'attraction d'une masse m par un astre de masse M.

b) En relativité restreinte, le centre d'inertie est le barycentre des énergies : $\overrightarrow{OG} = \frac{\sum\left(E_i \, \overrightarrow{OA_i}\right)}{\sum E_i}$ (avec en particulier une contribution des photons, pourtant de masse nulle). En prenant comme loi de base non la force mais l'énergie, justifier qu'on peut en déduire, comme généralisation “logique” pour une “énergie gravitationnelle” en relativité restreinte, l'expression : $E_p = -\frac{\mathcal{G} M \gamma m}{r}$.

2. • On considère une particule de masse m, soumise à l'attraction d'un astre de masse M. Cette particule part de l'infini vers l'astre, avec une vitesse initiale $v_0$ (le mouvement est rectiligne dans la direction radiale).

a) En partant d'un principe de conservation de l'énergie totale $E + E_p$, avec l'expression précédente pour $E_p$, exprimer la loi de variation de l'énergie E en fonction de la distance.

b) On se propose d'appliquer ceci au cas d'un photon, d'énergie $E = h\nu$ et de quantité de mouvement $p = -\frac{h\nu}{c}$ (algébriquement), avec une fréquence initiale $\nu_0$. On considère par contre inversement un photon partant de la surface d'un astre de rayon R. Existe-t-il une condition sur M et R telle que le photon ne puisse pas rejoindre l'infini (modèle de “trou noir”) ?

## III. Avance du périhélie

1. • On considère une particule N de masse m, soumise à l'attraction d'un astre de masse M.

• On suppose qu'on peut utiliser, comme généralisation “logique” de la loi de force de Newton en relativité restreinte, l'expression : $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G} M \gamma m}{r^2} \overrightarrow{u_r}$.

• D'après cette expression, montrer qu'il y a conservation du moment cinétique $\vec{\sigma} = \overrightarrow{ON} \times \vec{p}$, ce qui se traduit par “l'intégrale première” (constante du mouvement) : $\sigma = \gamma\, m\, r^2 \theta^{\bullet}$.

2. • En éliminant le temps à l'aide de $\sigma$, montrer que : $\vec{p}^{\bullet} = -\frac{\sigma^2 u^2}{\gamma m} . \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) \overrightarrow{u_r}$ en notant $u = \frac{1}{r}$.

3. • En déduire l'équation vérifiée par la variable u (pour éliminer $\gamma$, procéder de façon analogue à la question 2).

4. • Dans le cas d'une correction faible, par rapport à la mécanique non relativiste, on cherche des solutions de la forme : $u = \frac{1}{p}[1 + e \cos((1 - \varepsilon)\, \theta)]$ où $p$ et $e$ désignent le paramètre et l'excentricité de la trajectoire quasi-elliptique.

• En reportant dans l'équation et en négligeant les termes en $\varepsilon^2$ et $e^2$ (ce qui suppose une faible excentricité), en déduire l'avance du périhélie.

## IV. Avance du périhélie

1. • On considère une particule N de masse m, soumise à l'attraction d'un astre de masse M.

• On suppose qu'on peut utiliser, comme généralisation de la loi de force de Newton en relativité restreinte, l'expression en coordonnées polaires : $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G} M \gamma m}{r^2} . \left(\overrightarrow{u_r} + \frac{v_\theta}{c^2}\left(v_r \overrightarrow{u_\theta} - v_\theta \overrightarrow{u_r}\right)\right)$.

◊ remarque : cette loi est déduite du principe de moindre action ; elle impose un mouvement plan, ce qui permet de raisonner en coordonnées polaires.

• D'après cette expression, montrer qu'il y a pas conservation du moment cinétique $\vec{\sigma} = \overrightarrow{ON} \times \vec{p}$, mais qu'on obtient comme “intégrale première” (constante du mouvement) : $\vec{\Sigma} = \vec{\sigma} . \exp\left(-\frac{\mathcal{G} M}{c^2 r}\right)$.

2. • En éliminant le temps à l'aide de $\sigma$, montrer que : $\vec{p}^{\bullet} = -\frac{\sigma^2 u^2}{\gamma m} . \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) \overrightarrow{u_r}$ en notant $u = \frac{1}{r}$.

3. • En déduire l'équation vérifiée par la variable u (pour éliminer $\gamma$, procéder de façon analogue à la question 2).

4. • Dans le cas d'une correction faible, par rapport à la mécanique non relativiste, on cherche des solutions de la forme : $u = \frac{1}{p}[1 + e\cos((1 - \varepsilon)\,\theta)]$ où $p$ et $e$ désignent le paramètre et l'excentricité de la trajectoire quasi-elliptique.

• En reportant dans l'équation et en négligeant les termes en $\varepsilon^2$ et $e^2$ (ce qui suppose une faible excentricité), en déduire l'avance du périhélie.

## V. Avance du périhélie

1. • On considère une particule N de masse m, soumise à l'attraction d'un astre de masse M.

• On suppose qu'on peut utiliser, comme généralisation de la loi de force de Newton en relativité restreinte, l'expression en coordonnées polaires : $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}M\gamma m}{r^2}\,\frac{1}{1-\frac{\mathcal{G}M}{c^2 r}}.\left(\overrightarrow{u_r} + \frac{v_\theta}{c^2}\left(v_r\overrightarrow{u_\theta} - v_\theta\overrightarrow{u_r}\right)\right)$.

◊ remarque : cette loi est déduite du principe de moindre action ; elle impose un mouvement plan, ce qui permet de raisonner en coordonnées polaires.

• D'après cette expression, montrer qu'il y a pas conservation du moment cinétique $\vec{\sigma} = \overrightarrow{ON}\times\vec{p}$, mais qu'on obtient comme “intégrale première” (constante du mouvement) : $\vec{\Sigma} = \vec{\sigma}\,.\left(1-\frac{\mathcal{G}M}{c^2 r}\right)$.

2. • Dans ce modèle, la généralisation de l'énergie mécanique peut s'écrire : $E_m = \gamma\, mc^2 - \frac{\mathcal{G}M\gamma m}{r}$ ; cette quantité est une constante du mouvement.

• En notant $u = \frac{1}{r}$ et en éliminant le temps à l'aide de $\sigma$, montrer que :

$$\frac{\gamma}{mc^2}\,\frac{dE_m}{du} = \gamma\,\frac{d\gamma}{du}.\left(1-\frac{\mathcal{G}M}{c^2}u\right) - \frac{\mathcal{G}M}{c^2}\,\gamma^2.$$

3. • En déduire l'équation vérifiée par la variable u (pour éliminer $\gamma$, procéder de façon analogue à la question 2).

4. • Dans le cas d'une correction faible, par rapport à la mécanique non relativiste, on cherche des solutions de la forme : $u = \frac{1}{p}[1 + e\cos((1 - \varepsilon)\,\theta)]$ où $p$ et $e$ désignent le paramètre et l'excentricité de la trajectoire quasi-elliptique.

• En reportant dans l'équation et en négligeant les termes en $\varepsilon^2$ et $e^2$ (ce qui suppose une faible excentricité), en déduire l'avance du périhélie.

## VI. Déviation d'un photon

• On considère une particule N de masse m, soumise à l'attraction d'un astre de masse M.

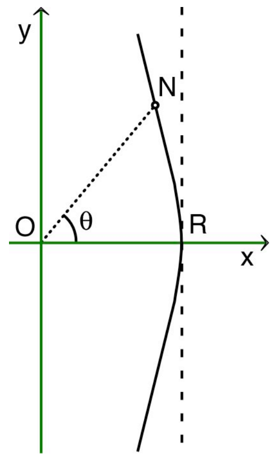
• On suppose qu'on peut utiliser, comme généralisation “logique” de la loi de force de Newton en relativité restreinte, l'expression : $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}M\gamma m}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}$. On en déduit qu'il y a conservation du moment cinétique $\vec{\sigma} = \overrightarrow{ON}\times\vec{p}$, ce qui se traduit par “l'intégrale première” (constante du mouvement) : $\sigma = \gamma\, m\, r^2\dot{\theta}$.

• On en déduit en outre l'équation de la trajectoire, en notant $u = \frac{1}{r}$ et $\Gamma = \frac{\sigma}{m}$ :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mathcal{G}M}{\Gamma^2} + \frac{\mathcal{G}M}{c^2}.\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right).$$

1. • Montrer que le cas d'un photon, d'énergie $E = h\nu$ et de quantité de mouvement $p = -\dfrac{h\nu}{c}$ (algébriquement), donne l'équation du mouvement : $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = \dfrac{\mathcal{G}M}{c^2} \cdot \left( \left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \right)$.

2. • On considère un photon partant de l'infini vers l'astre. Le mouvement (initialement rectiligne) suit une courbe symétrique passant (au plus près) à la distance R de l'astre (sur l'axe Ox).




a) Montrer que le cas newtonien (photon non dévié) correspond à :

$$u = \frac{\cos(\theta)}{R}.$$

b) Justifier qu'on peut chercher une solution approchée de l'équation précédente, en remplaçant dans le second membre l'expression de u par la solution particulière newtonienne.

c) Montrer que les solutions approchées correspondent à :

$$x = R - \frac{\mathcal{G}M}{c^2 R} \sqrt{x^2 + y^2} .$$

d) En déduire l'angle de déviation des photons (variation d'angle aux limites à l'infini de la trajectoire).