RR. I - TRANSFORMATION DE LORENTZ

1. Introduction

• Les résultats expérimentaux montrent que, pour des vitesses proches de celle de la lumière dans le vide ($c = 299792458\ m.s^{-1}$), les lois de la mécanique newtonienne deviennent fausses.

☞ remarque : les termes correctifs sont souvent de l'ordre de $\frac{v^2}{c^2}$ et il faut donc atteindre $v \approx \frac{c}{10}$ pour déceler un écart de l'ordre de 1%.

• Ceci est lié au principe de relativité : les lois physiques doivent être logiquement invariantes lors d'un changement de référentiel :

◊ la mécanique newtonienne se base sur l'interprétation de Galilée, qui suppose que le temps est le même pour tous les référentiels et que les vitesses s'ajoutent : $\vec{v} = \overrightarrow{v_e} + \vec{v}'$;

◊ la mécanique “relativiste” se base sur l'interprétation d'Einstein, qui tient compte de l'interprétation différente des durées selon le référentiel et qui compose les vitesses de façon plus complexe (en particulier **la célérité c est indépendante du référentiel**).

🕮 *exercice n° I.*

2. Changement de référentiel d'inertie

2.1. Intervalle d'espace-temps

• Lors de la propagation d'un signal lumineux dans un référentiel galiléen, la distance parcourue pendant une durée dt est : $d\ell = c\ dt$. D'après l'expression en coordonnées cartésiennes : $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ la propriété précédente peut être plus pratique sous la forme : $d\ell^2 = c^2\ dt^2$.

Ceci peut encore s'écrire : $ds^2 = c^2\, dt^2 - d\ell^2 = 0$ en considérant “ds” comme une “mesure” de “l'intervalle d'espace-temps” correspondant.

• L'invariance de la célérité c par changement de référentiel (1) →€ (2) implique : $ds_{(2)}{}^2 = 0$ quand $ds_{(1)}{}^2 = 0$.

Compte tenu de l'homogénéité et l'isotropie de l'espace, les variations infinitésimales doivent donc être proportionnelles : $ds_{(1)}{}^2 = \alpha(v_{12})\, ds_{(2)}{}^2$ où la fonction α ne peut dépendre que de la norme de la vitesse relative.

Ainsi pour trois référentiels : $\alpha(v_{12}).\, \alpha(v_{23}) = \alpha(v_{13})$; or la composition des vitesses dépend de leurs normes mais aussi de leurs directions relatives. Donc α ne peut être qu'une constante, d'où forcément $\alpha = 1$.

L'intervalle d'espace-temps ds tel que $ds^2 = c^2\, dt^2 - d\ell^2$ est donc invariant par changement de référentiel d'inertie (référentiel “galiléen”).

2.2. Quadrivecteurs

◊ remarque : les “quadrivecteurs” ne sont pas indispensables ici, mais permettent de regrouper les lois relativistes sous une forme plus méthodique.

• De façon générale, la mécanique relativiste peut être décrite à l'aide de vecteurs à quatre coordonnées ; par exemple (il existe plusieurs conventions de notation) : $\overleftrightarrow{OM} = (ct, \overrightarrow{OM})$ désigne la “position” dans l'espace-temps.

Les coordonnées d'un quadrivecteur position peuvent être notées x^α avec un indice écrit en haut $\alpha = 0..3$, le temps étant ici associé à la coordonnée n° 0.

◊ remarque : pour ne pas confondre avec un exposant lorsqu'on cite une coordonnée d'espace particulière, on peut écrire x, y, z au lieu de x^1, x^2, x^3.

• On peut ensuite définir une "matrice diagonale" $\eta_{\alpha\beta}$ dont les coefficient non nuls sont : $\eta_{00} = 1$ et $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$.

En adoptant la convention de sommation d'Einstein, tout indice répété en haut et en bas sous-entend une sommation : $\eta_{\alpha\beta}\, x^\beta = \sum_\beta \eta_{\alpha\beta} x^\beta$.

On peut ainsi définir :
un "pseudo produit scalaire" : $\overleftrightarrow{X}\cdot\overleftrightarrow{Y} = X^0 Y^0 - \vec{X}\cdot\vec{Y} = \eta_{\alpha\beta}\, X^\alpha\, Y^\beta$;
d'où découle une "pseudo norme" : $\left\|\overleftrightarrow{X}\right\|^2 = \overleftrightarrow{X}^2 = (X^0)^2 - \vec{X}^2 = \eta_{\alpha\beta}\, X^\alpha\, X^\beta$.

En particulier avec ces notations : $ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = \left\| d\overleftrightarrow{OM} \right\|^2$.

📖 *exercice n° II.*

2.3. Transformation de Lorentz

• Pour décrire le passage d'un référentiel d'inertie $\mathcal{R}$ à un autre $\mathcal{R}'$, on veut que tout point en mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$, correspondant à : $x^i = x^i(0) + v^i\, t$ avec $i = 1..3$, donne dans $\mathcal{R}'$: $x'^i = x'^i(0) + v'^i\, t'$.

Pour cela la transformation doit être linéaire : $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta\, x^\beta + A^\alpha$.

En choisissant de faire coïncider les origines O et O' pour les instants $t = 0$ et $t' = 0$, on obtient plus simplement : $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta\, x^\beta$.

Avec des axes d'espace parallèles dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, l'axe Ox selon le mouvement relatif, on obtient (compte tenu des symétries par rapport aux axes) :

$$ct' = \Lambda^0{}_0\, ct + \Lambda^0{}_1\, x \;;\; x' = \Lambda^1{}_0\, ct + \Lambda^1{}_1\, x \;;\; y' = \Lambda^2{}_2\, y \;;\; z' = \Lambda^3{}_3\, z.$$

• Le mouvement de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}'$ est opposé, donc doit s'exprimer de même par rapport à des axes Ox et Ox' orientés en sens contraire :

$$ct = \Lambda^0{}_0\, ct' - \Lambda^0{}_1\, x' \;;\; x = -\Lambda^1{}_0\, ct' + \Lambda^1{}_1\, x' \;;\; y = \Lambda^2{}_2\, y' \;;\; z = \Lambda^3{}_3\, z'.$$

En reportant dans les relations précédentes, ceci donne :

$y' = y$ et $z' = z$ (c'est-à-dire $\Lambda^2{}_2 = \Lambda^3{}_3 = 1$) ;

$$ct = \left(\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_0\right) ct + \left(\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_1 - \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_1\right) x \;;$$

$$x = \left(\Lambda^1{}_1\Lambda^1{}_0 - \Lambda^1{}_0\Lambda^0{}_0\right) ct + \left(\left(\Lambda^1{}_1\right)^2 - \Lambda^1{}_0\Lambda^0{}_1\right) x \;;$$

(c'est-à-dire $\Lambda^0{}_0 = \Lambda^1{}_1$ et $(\Lambda^1{}_1)^2 - \Lambda^1{}_0\, \Lambda^0{}_1 = 1$).

En outre, le mouvement de O' dans $\mathcal{R}$ correspond à $x = v_e\, t$ (avec v_e vitesse d'entraînement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$), d'où $\Lambda^1{}_0\, c + \Lambda^1{}_1\, v_e = 0$ et donc :

$$t' = \Lambda^1{}_1 . \left(t + \frac{1 - \left(\Lambda^1{}_1\right)^2}{\left(\Lambda^1{}_1\right)^2 v_e} x \right) \;;\; x' = \Lambda^1{}_1 .(x - v_e\, t) \;;\; y' = y \;;\; z' = z.$$

• L'hypothèse $t' = t$ aboutit à la transformation de Galilée $x' = x - v_e\, t$. En se basant au contraire sur l'observation de l'invariance de c, on doit exprimer que $\frac{dx}{dt} = c$ implique

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\Lambda^1{}_1 \cdot \left(dx - v_e\, dt\right)}{\Lambda^1{}_1 \cdot \left(dt - \frac{1 - \left(\Lambda^1{}_1\right)^2}{\left(\Lambda^1{}_1\right)^2 v_e} dx \right)} = c.$$

La simplification donne : $\Lambda^1{}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta_e{}^2}} = \gamma_e$ avec $\beta_e = \dfrac{v_e}{c}$; ainsi :

$$ct' = \gamma_e .(ct - \beta_e\, x) \;;\; x' = \gamma_e .(x - \beta_e\, ct) \;;\; y' = y \;;\; z' = z.$$

📖 *exercices n° III et IV.*

2.4. Invariance de la pseudo norme

• La transformation de Lorentz est construite de façon à conserver l'intervalle d'espace-temps ds ; on constate qu'elle conserve plus généralement le pseudo produit scalaire et la pseudo norme des quadrivecteurs.

En effet : $\eta_{\alpha\beta}\, X'^{\alpha}\, Y'^{\beta} = \eta_{\alpha\beta}\, \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\, \Lambda^{\beta}{}_{\nu}\, X^{\mu}\, Y^{\nu}$; or on obtient $\eta_{\alpha\beta}\, \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\, \Lambda^{\beta}{}_{\nu} = \eta_{\mu\nu}$ donc $\eta_{\alpha\beta}\, X'^{\alpha}\, Y'^{\beta} = \eta_{\mu\nu}\, X^{\mu}\, Y^{\nu}$.

🕮 *exercice n° V.*

2.5. Composition des vitesses

• La loi de composition des vitesse n'est par conséquent pas une simple addition (algébrique) ; elle redonne effectivement $v'_x = c$ pour $v_x = c$:

$$\boxed{v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - v_e}{1 - \frac{v_e v_x}{c^2}} \quad ; \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'} = v_y\, \frac{\sqrt{1-\beta_e{}^2}}{1 - \frac{v_e v_x}{c^2}} \quad \text{(et de même } v'_z\text{).}}$$

🕮 *exercice n° VI.*

3. Effets spatio-temporels

3.1. Notion de temps-date (ou temps-heure)

• Dans un référentiel $\mathcal{R}$, galiléen, on peut synchroniser toute les horloges avec celle située à l'origine O :

◊ puisque la vitesse de la lumière est une constante universelle, si on envoie depuis un point M un signal lumineux qui est réfléchi en O et revient en M, on peut imposer qu'au milieu de la durée aller-retour l'horloge en M indique la même valeur que celle en O affichait au moment de la réflexion ;

◊ en procédant ainsi, toutes les horloges synchronisées avec celle de O sont synchronisées entre elles ;

◊ on peut donc ainsi définir une date/heure t_0 valable dans tout $\mathcal{R}$.

◊ remarque : cette propriété n'est pas a priori évidente ; en mécanique relativiste, c'est généralement faux pour les référentiels non galiléens (décrits par la relativité générale).

• Une telle synchronisation des horloges est de même possible dans tout autre référentiel $\mathcal{R}'$ galiléen.

Si par contre, à un instant (date) t_0 défini dans $\mathcal{R}$, on synchronise dans $\mathcal{R}'$ les horloges de deux points M_1 et M_2 avec celles synchronisées dans $\mathcal{R}$, alors on constate que ces deux horloges ne sont pas synchronisées entre elles dans $\mathcal{R}'$: d'après la transformation de Lorentz, t' dépend de t et de x.

◊ remarque : dans ce processus, on synchronise les horloges fixes dans $\mathcal{R}'$ qui coïncident avec M_1 et M_2 à l'instant t_0 de $\mathcal{R}$, mais ça ne correspond pas à un même instant dans $\mathcal{R}'$.

• Ainsi la notion de simultanéité dépend du mouvement de l'observateur ; il n'existe pas de temps-date “universel” valable dans tous les référentiels.

📖 *exercice n° VII.*

3.2. Notion de temps-durée ; temps propre

• Dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, après avoir synchronisé entre elles toute les horloges, on peut attendre une certaine “durée”, puis tester à nouveau la synchronisation des horloges :

◊ on constate (sauf défaut de fonctionnement) qu'elles sont restées synchronisées ;

◊ ceci signifie que le temps-durée s'écoule de la même façon pour tout le référentiel $\mathcal{R}$;

◊ cela permet d'utiliser la “coordonnée” date/heure t pour calculer la durée Δt (analogue temporel de la notion de longueur $\Delta\ell$ dans l'espace) ; par exemple simplement : $\Delta t = \Delta \mathrm{t} = t_1 - t_0$.

◊ remarque : cette propriété n'est pas a priori évidente ; ainsi, en coordonnées polaires, il n'y a pas toujours la même longueur d'arc $\Delta\ell = r.(\theta_1 - \theta_0) \neq \Delta\theta$ entre deux valeurs de la coordonnée θ.

• De telles mesures de durées sont de même possibles dans tout autre référentiel $\mathcal{R}'$ galiléen.

Par contre, puisque la définition d'une durée nécessite de définir une date début et une date fin, les durées définies dans des référentiels différents paraissent généralement différentes (les synchronisations des horloges sont incompatibles).

• Pour étudier un point matériel M en mouvement à vitesse $\vec{v}$ constante par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, on est amené à utiliser le "temps propre" τ associé au point matériel dans son propre référentiel $\mathcal{R}'$ (également galiléen).

La propriété $d\overrightarrow{O'M} = \vec{0}$ correspond à :

$$ds'^2 = c^2 d\tau^2 = ds^2 = c^2 dt^2 - d\ell^2 = (c^2 - v^2)\, dt^2 \quad ; \quad d\tau = dt.\sqrt{1-\beta^2}\ .$$

Cet effet de "dilatation" des durées dans $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}'$ (ou réciproquement) découle du fait que la simultanéité ne correspond pas dans les deux référentiels (t' dépend de t mais aussi de x et réciproquement).

🕮 *exercices n° VIII, IX et X.*

3.3. Notion de longueur propre

• De façon analogue, lors de l'étude d'une règle en mouvement, selon sa direction, à une vitesse $\vec{v}$ constante par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, on est amené à utiliser la "longueur propre" L_0 mesurée dans son propre référentiel $\mathcal{R}'$ (galiléen).

La propriété $\Delta t = 0$ $(\Delta t' \neq 0)$ imposée à la mesure de L correspond à :

$$L_0 = \Delta x' = \gamma_e .(\Delta x - v\, \Delta t) = \gamma\, L \quad ; \quad L = L_0.\sqrt{1-\beta^2}\ .$$

Cet effet de "contraction" des longueurs dans $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}'$ (ou réciproquement) découle de même du fait que la simultanéité dépend du référentiel.

🕮 *exercices n° XI, XII, XIII et XIV.*