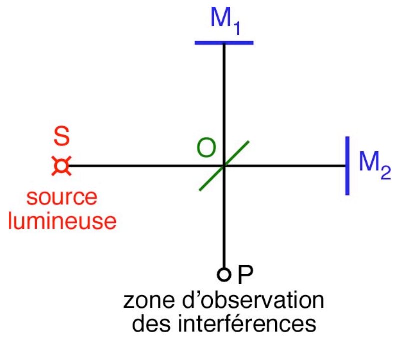
TRANSFORMATION DE LORENTZ - exercices

I. Expérience de Michelson et Morley en mécanique newtonienne

• Un interféromètre de Michelson correspond au schéma ci-contre.

• En O est placée une lame semi-réfléchissante, qui laisse passer la moitié de la lumière vers un miroir M_2 et réfléchit l'autre moitié vers un miroir M_1. Au “retour”, la lame envoie de même la moitié de ce qui vient de chaque miroir vers la source (lumière “perdue”) et envoie l'autre moitié vers une zone d'interférences en P.

• Les interférences sont obtenues par composition de la lumière qui suit le trajet SOM_1OP et de la lumière qui suit le trajet SOM_2OP.



• Cet interféromètre est fixe dans le référentiel du laboratoire et on suppose que $OM_1 = OM_2 = L$. On utilise la mécanique “classique”, c'est-à-dire qu'on suppose que les vitesses s'ajoutent, qu'il existe donc un référentiel privilégié par rapport auquel la vitesse de la lumière est c. On note alors $\vec{v}$ (supposée selon l'axe (Ox) correspondant à SOM_2) la vitesse d'entraînement du laboratoire par rapport à ce référentiel “absolu”.

1. • Déterminer les durées T_1 et T_2 des trajets OM_1O et OM_2O parcourus par la lumière.
◊ indication : pour T_1 le calcul est plus facile dans le référentiel “absolu”.

2. • Les franges d'interférence observées dépendent-elles de v ?

3. • En Réalité, l'expérience montre qu'elles n'en dépendent pas ; que peut-on dire de la validité de la mécanique “classique” (non relativiste) pour cette expérience ?

II. Pseudo-norme et représentations des vecteurs

1. • Il est parfois utile de représenter graphiquement l'espace-temps ; pour cela, on se limite ici à la représentation plane avec deux coordonnées x et ct (on représente plutôt x horizontalement).

a) On considère une base $(\overleftrightarrow{u_0}, \overleftrightarrow{u_1})$ telle que $\overleftrightarrow{u_0} = (1, 0, 0, 0)$ et $\overleftrightarrow{u_1} = (0, 1, 0, 0)$; expliquer pourquoi cette base est “pseudo-orthonormée”.

b) On considère les 4-vecteurs $\overleftrightarrow{v_0} = (\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ et $\overleftrightarrow{v_1} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, 0, 0)$; montrer qu'il forment aussi une base “pseudo-orthonormée”.

c) On considère les 4-vecteurs $\overleftrightarrow{A} = (1, 1, 0, 0)$ et $\overleftrightarrow{B} = (1, -1, 0, 0)$; montrer qu'il sont du genre “lumière” et non “orthogonaux”.

2. a) Représenter $\overleftrightarrow{v_0}$, $\overleftrightarrow{v_1}$, $\overleftrightarrow{A}$ et $\overleftrightarrow{B}$ dans la base $(\overleftrightarrow{u_0}, \overleftrightarrow{u_1})$ notée selon les axes.
b) Préciser le lieu des extrémités des 4-vecteurs de pseudo-norme égale à 1, ou égale à -1.
c) Préciser la condition pour que deux 4-vecteurs soient “orthogonaux”.
d) Représenter de même dans la base $(\overleftrightarrow{v_0}, \overleftrightarrow{v_1})$ notée selon les axes.

III. Transformation de Lorentz et durée de vie d'un muon

• La “durée de vie” moyenne d'un lepton μ au repos est : $T_0 = 2{,}2.10^{-6}$ s.

• Calculer sa durée de vie dans un référentiel où il se déplace à la vitesse $v = \beta c$ avec $\beta = 0{,}6$.

IV. Transformation de Lorentz et longueur d'une barre

• Un vaisseau spatial survolant la Terre a une vitesse horizontale $v = \beta c$ avec $\beta = 0{,}8$. Le vaisseau contient une règle d'un mètre, initialement verticale.

• Un astronaute présent dans ce vaisseau place la règle en position horizontale. Décrire le changement de longueur de la règle.

V. Pseudo-norme et invariance des intervalles d'espace-temps

• Une particule instable parcourt, dans le référentiel du laboratoire, une distance $L = 5{,}19$ m avant de se désintégrer. La durée de ce trajet, dans le référentiel du laboratoire, est $T = 20$ ns.

1. • Quelle est la vitesse de la particule dans le référentiel du laboratoire ?

2. • Quelle est la “durée de vie” T_0 de la particule dans son propre référentiel ?

VI. Vitesse d'une fusée

• Une fusée F_1 s'éloigne de la Terre à la vitesse $v_1 = \beta_1 c$, avec $\beta_1 = 0{,}6$. Elle éjecte une fusée F_2 à la vitesse relative (par rapport à F_1) $v'_2 = \beta'_2 c$, avec $\beta'_2 = 0{,}6$.

• Calculer la vitesse v_2 de F_2 par rapport à la Terre.

VII. Synchronisation des horloges

• On considère deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ galiléens, munis de repères cartésiens (Oxyz) et (O'x'y'z') avec les axes (Ox) et (O'x') de même orientation. On suppose $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ avec une vitesse d'entraînement v_e selon les axes (Ox).

1. • Un physicien P synchronise préalablement entre elles toutes les horloges dans son référentiel $\mathcal{R}$ (on suppose que toutes les horloges ont un fonctionnement “idéal”). Un autre physicien P' synchronise de même toutes les horloges dans son référentiel $\mathcal{R}'$.

• Ensuite, à l'instant (dans chaque référentiel) où O et O' se croisent, les physiciens notent les indications t_0 et t'_0 des horloges situées en ces deux points. Ceci revient à synchroniser les horloges de O et O', puisque chacun peut ensuite décaler de cette valeur toutes les mesures de temps dans son référentiel ; c'est par contre plus simple à effectuer, car décaler réellement toutes les horloges est compliqué. Pour simplifier les notations, on supposera donc qu'une telle synchronisation a été effectuée ; ceci revient à considérer $t_0 = 0$ et $t'_0 = 0$.

a) Représenter schématiquement comment P voit quelques horloges situées le long de (Ox) et quelques horloges situées le long de (O'x').

b) Représenter les mêmes horloges vues par P'. Commenter.

2. • On suppose maintenant qu'après avoir synchronisé toutes les horloges dans son référentiel $\mathcal{R}$, le physicien P synchronise en même temps (par rapport à $\mathcal{R}$; ceci suppose qu'il utilise un dispositif automatique préparé pour cela) toutes les horloges selon (O'x') avec celles selon (Ox). En pratique chaque horloge envoie à son homologue un signal qui permet de repérer son décalage et de le compenser.

a) Représenter schématiquement comment P voit quelques horloges situées le long de (Ox) et quelques horloges situées le long de (O'x').

b) Représenter les mêmes horloges vues par P'. Commenter.

VIII. Alpha du Centaure

• L'étoile “Alpha du Centaure” est située à 4,2 a.ℓ. (années-lumière) de la Terre.

1. • À quelle vitesse constante une fusée devrait-elle voyager pour aller sur (α)-Centaure en une durée correspondant à 3 ans pour les astronautes ?

2. • Combien de temps durerait le voyage par rapport à la Terre ?

IX. Désintégration d'un pion

• La “durée de vie moyenne” d'un méson π au repos est $2{,}6.10^{-8}$ s. À quelle vitesse un faisceau de pions doit-il se déplacer pour que chaque pion parcourre en moyenne 20 m avant de se désintégrer ?

X. Paradoxe des jumeaux

• Initialement dans un référentiel galiléen, deux jumeaux partent en fusée, en sens opposé dans la direction de l'axe (Ox) ; on suppose qu'ils voyagent à vitesse constante $v = \frac{c}{2}$.

◊ remarque : pour éviter toute difficulté avec l'inévitable phase d'accélération, on peut imaginer qu'ils partent symétriquement, en décrivant une boucle de part et d'autre afin de se croiser à la vitesse souhaitée au moment de leur passage à l'origine, choisi comme origine du temps.

1. • En raisonnant dans son propre référentiel, chacun des deux jumeau pense que l'autre vieillit moins que lui ; pourquoi ?

2. • Expliquer pourquoi ce paradoxe n'est qu'apparent.

XI. Densité volumique

• Compte tenu des relations de transformation des longueurs lors des changements de référentiel, quelle est la relation exprimant la transformation de la “densité volumique” (nombre d'objets par unité de volume) ?

XII. Transformation des angles

• Une particule, étudiée dans un référentiel $\mathcal{R}$, se déplace dans le plan (Oxy) avec une vitesse $\vec{u}$ faisant un angle θ par rapport à l'axe (Ox).

• Montrer que, par rapport à un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation à la vitesse v selon (Ox), la vitesse $\vec{u}'$ de la particule fait, par rapport à (Ox), un angle θ' tel que : $\tan(\theta') = \dfrac{\sin(\theta)\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\cos(\theta)-\frac{v}{u}}$.

XIII. Simultanéité relative

• Une grange de longueur D_0 comporte une porte à chaque extrémité, la porte d'entrée est initialement ouverte tandis que la porte du fond est initialement fermée. Une poutre, de longueur $L_0 = 2D_0$, est lancée à vitesse v constante pour traverser la grange.

• Les portes sont par ailleurs munies d'un dispositif de manœuvre : dès que la poutre a fini d'entrer, la porte d'entrée se ferme et la porte du fond s'ouvre “instantanément”.

1. • En raisonnant dans le référentiel $\mathcal{R}$ de la grange, montrer que la poutre peut traverser la grange si sa vitesse v est suffisante.

2. • Comment interpréter le même phénomène en raisonnant dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de la poutre ?

XIV. Il était une fois un univers...

• En ces temps là, dans un univers étrange perdu au fin fond de l'espace-temps, la lumière se propageait à la célérité $c = 100\ \mathrm{m.s^{-1}}$. La légende qui suit se passe dans cet univers...

• Un train, de longueur $L_0 = 99$ m, se déplace à vitesse v constante sur une voie en ligne droite. Ce train doit traverser la gare du prochain village, de longueur $D_0 = 100$ m.

• Le train est en retard ; sachant qu'aucun passager n'a prévu de monter ou de descendre du train à cet arrêt, le conducteur du train voudrait éviter de s'arrêter. Mais le réseau de voies est muni d'un dispositif de portes électroniques à l'entrée et à la sortie des gares, manœuvrées par des signaux automatiques prévoyant un arrêt :

◊ dès que l'arrière du train est dans la gare, un capteur situé à l'entrée coupe l'alimentation électrique dans la portion de voie qui précède (interdisant ainsi l'entrée d'un autre train) ; en même temps, un signal électrique est envoyé (à la vitesse de la lumière) vers la sortie pour indiquer que l'entrée est fermée ;

◊ à condition que l'entrée soit fermée, un capteur situé à la sortie ouvre le passage, lorsque le train y arrive, en rétablissant l'alimentation électrique de la portion de voie qui suit (qui avait été interrompue après le passage du train précédent).

1. a) Le chef de gare, monsieur Lagrange, sait qu'un train court peut passer sans s'arrêter, à condition de rouler au ralenti. Justifier (sans calcul) son raisonnement.

b) Dans le cas de ce train presque aussi long que la gare, cela imposerait une vitesse tellement faible lors de la traversée que ce serait équivalent à un arrêt. Monsieur Lagrange, connaissant des rudiments de mécanique relativiste, pense toutefois que le train peut passer sans s'arrêter à condition au contraire d'avancer très vite, grâce à la contraction relativiste de sa longueur. Calculer la longueur du train dans le référentiel $\mathcal{R}$ de la gare s'il se déplace à la vitesse $v = \beta c$.

c) En prenant comme origine du temps l'instant où l'arrière du train franchit l'entrée, calculer l'instant d'arrivée à la sortie du signal émis par l'entrée.

d) Calculer l'instant d'arrivée de l'avant du train à la sortie.

e) Existe-t-il une valeur de β telle que la conclusion soit convaincante ?

2. a) Le conducteur du train, monsieur Laperche, connaissant la mécanique relativiste, pense que la réponse était “facilement” prévisible : il suffisait de raisonner dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du train. A-t-il raison ?

b) On considère le cas où la vitesse du train correspond à $\beta = 0{,}9$; commenter l'ordre de passage des deux extrémités du train à l'entrée et à la sortie.