ÉLECTROMAGNÉTISME RELATIVISTE - corrigé des exercices

I. Invariants électromagnétiques

1. • On peut écrire : $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = F^{0i}F_{0i} + F^{i0}F_{i0} + F^{ij}F_{ij} = -2\frac{\vec{E}^2}{c^2} + (\varepsilon^{ijk}B_k)(-\varepsilon_{ij\ell}B^\ell)$.

• Avec : $\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ij\ell} = 2\,\delta^k{}_\ell$ et $-B_kB^k = \vec{B}^2$ on obtient finalement : $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = -2.\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2\right)$.

◊ remarque : on peut utiliser des indices co/contravariants avec les symboles de Levi-Civitta mais ils ne se comportent par tout à fait comme des tenseurs : $\eta^{i\ell}\eta^{jm}\eta^{kn}\varepsilon_{\ell nm} = -\varepsilon^{ijk}$.

2. • On peut écrire : $F^{*\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = F^{*0i}F_{0i} + F^{*i0}F_{i0} + F^{*ij}F_{ij} = -2\frac{\vec{E}}{c}\boldsymbol{\cdot}\vec{B} + (-\varepsilon^{ijk}\frac{E_k}{c})(-\varepsilon_{ij\ell}B^\ell)$.

• Avec : $\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ij\ell} = 2\,\delta^k{}_\ell$ et $-\frac{E_k}{c}B^k = \frac{\vec{E}}{c}\boldsymbol{\cdot}\vec{B}$ on obtient finalement : $F^{*\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = -4\frac{\vec{E}}{c}\boldsymbol{\cdot}\vec{B}$.

II. Invariants électromagnétiques

• Ce résultat est mentionné dans certains ouvrages d'électromagnétisme, sans démonstration.
• J'ai un peu cherché la démonstration, en vain... on verra plus tard si j'ai le temps.

III. Invariants électromagnétiques

1. • La transformation du 4-potentiel peut s'écrire :

$\underline{A}^0 = \gamma.(A^0 - \beta\, A^1)$; $\underline{A}^1 = \gamma.(-\,\beta\, A^0 + A^1)$; $\underline{A}^2 = A^2$; $\underline{A}^3 = A^3$.

• La transformation des dérivées peut s'écrire :

$\underline{\partial}^0 = \gamma.(\partial^0 - \beta\,\partial^1)$; $\underline{\partial}^1 = \gamma.(-\,\beta\,\partial^0 + \partial^1)$; $\underline{\partial}^2 = \partial^2$; $\underline{\partial}^3 = \partial^3$.

• La transformation du champ électrique est donc :

$\frac{\underline{E}^1}{c} = \underline{F}^{10} = \underline{\partial}^1\underline{A}^0 - \underline{\partial}^0\underline{A}^1 = \gamma^2.(1 - \beta^2)\, F^{10}$; $\underline{E}^1 = E^1$;

$\frac{\underline{E}^2}{c} = \underline{F}^{20} = \underline{\partial}^2\underline{A}^0 - \underline{\partial}^0\underline{A}^2 = \gamma.(F^{20} - \beta\, F^{21})$; $\underline{E}^2 = \gamma.(E^2 - \beta\, cB^3)$;

$\frac{\underline{E}^3}{c} = \underline{F}^{30} = \underline{\partial}^3\underline{A}^0 - \underline{\partial}^0\underline{A}^3 = \gamma.(F^{30} + \beta\, F^{13})$; $\underline{E}^3 = \gamma.(E^3 + \beta\, cB^2)$.

• La transformation du champ magnétique est de même :

$\underline{B}^1 = \underline{F}^{32} = \underline{\partial}^3\underline{A}^2 - \underline{\partial}^2\underline{A}^3 = F^{32}$; $\underline{B}^1 = B^1$;

$\underline{B}^2 = \underline{F}^{13} = \underline{\partial}^1\underline{A}^3 - \underline{\partial}^3\underline{A}^1 = \gamma.(F^{13} + \beta\, F^{30})$; $c\underline{B}^2 = \gamma.(cB^2 + \beta\, E^3)$;

$\underline{B}^3 = \underline{F}^{21} = \underline{\partial}^2\underline{A}^1 - \underline{\partial}^1\underline{A}^2 = \gamma.(F^{23} - \beta\, F^{20})$; $c\underline{B}^3 = \gamma.(cB^3 - \beta\, E^2)$.

2.a. • On considère maintenant le vecteur complexe : $\vec{\mathfrak{F}} = \frac{\vec{E}}{c} + i\,\vec{B}$.

• D'après ce qui précède, sa transformation de Lorentz peut s'écrire :

$\underline{\mathfrak{F}}^1 = \mathfrak{F}^1$;

$\underline{\mathfrak{F}}^2 = \frac{\gamma}{c}.(E^2 - \beta\, cB^3) + i\,\frac{\gamma}{c}.(cB^2 + \beta\, E^3) = \gamma\,\mathfrak{F}^2 + i\,\beta\gamma\,\mathfrak{F}^3$;

$\underline{\mathfrak{F}}^3 = \frac{\gamma}{c}.(E^3 + \beta\, cB^2) + i\,\frac{\gamma}{c}.(cB^3 - \beta\, E^2) = \gamma\,\mathfrak{F}^3 - i\,\beta\gamma\,\mathfrak{F}^2$.

2.b. • Pour une rotation (d'un angle complexe), seule la norme invariante :

$$(\mathfrak{F}^1)^2 + (\mathfrak{F}^2)^2 + (\mathfrak{F}^3)^2 = (\mathfrak{F}^1)^2 + (\gamma\, \mathfrak{F}^2 + i\, \beta\gamma\, \mathfrak{F}^3)^2 + (\gamma\, \mathfrak{F}^3 - i\, \beta\gamma\, \mathfrak{F}^2)^2 \;;$$

$$= (\mathfrak{F}^1)^2 + \gamma^2.(1 - \beta^2).[(\mathfrak{F}^2)^2 + (\mathfrak{F}^3)^2] = (\mathfrak{F}^1)^2 + (\mathfrak{F}^2)^2 + (\mathfrak{F}^3)^2.$$

• On peut aussi écrire : $\vec{\mathfrak{F}}^2 = \frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2 + 2\, i\, \frac{\vec{E}}{c} \cdot \vec{B}$; d'où les invariants : $\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2$ et $\frac{\vec{E}}{c} \cdot \vec{B}$.

IV. Invariance de jauge et théorème de Nœther

• Dans l'expression de l'action, le terme des particules chargées ne dépend pas de A^μ et le terme du champ électromagnétique ne dépend que du champ $F^{\alpha\beta}$ qui est invariant dans une transformation de jauge. La variation de l'action se limite donc à celle du terme d'interaction $\mathcal{S}_{int} = -\frac{1}{c} \int_{\mathcal{V}} A_\alpha\, j^\alpha\, d^4x$.

• Dans une transformation de jauge infinitésimale $A_\alpha \rightarrow A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \epsilon$, la variation de l'action doit être linéaire par rapport à $\delta A_\alpha = \partial_\alpha \epsilon$ et on peut noter J^α le “coefficient“ correspondant :

$$\delta\mathcal{S} = \delta\mathcal{S}_{int} = -\frac{1}{c} \int \delta A_\alpha\, J^\alpha\, d^4x = -\frac{1}{c} \int \partial_\alpha \epsilon\, J^\alpha\, d^4x \;;$$

$$\delta\mathcal{S} = -\frac{1}{c} \int \partial_\alpha(\epsilon\, J^\alpha)\, d^4x + \frac{1}{c} \int \epsilon\, \partial_\alpha J^\alpha\, d^4x.$$

• Puisque l'intégrale de la 4-divergence est nulle (égale aux flux du 4-vecteur à travers l'hypersurface à l'infini, où on impose $\epsilon = 0$) et puisque l'action doit être invariante, il reste : $\delta\mathcal{S} = \frac{1}{c} \int \epsilon\, \partial_\alpha J^\alpha\, d^4x = 0$.

• Étant donné que ϵ est quelconque, ceci impose la conservation du “courant” J^α : $\partial_\alpha J^\alpha = 0$.

• Ceci est lié au théorème de Nœther : à toute invariance est associée un courant conservé. Il s'agit ici du courant des particules chargées : $J^\alpha = j^\alpha$.

◊ remarque : la nullité de $\delta\mathcal{S}$ pour δA_α quelconque pourrait sembler imposer $J^\alpha = 0$, mais ce n'est pas le cas car alors le terme du champ électromagnétique intervient aussi (on obtient les relations entre courants et champs) ; en fait ici les δA_α ne sont pas indépendants (ils sont reliés par la relation de changement de jauge).

V. Détermination du tenseur énergie-impulsion

1. • En intégrant, comme généralement, sur une hyper-surface du type $t = \text{Cste}$, la seule composante non nulle est $dS_0 = d^3\mathcal{V}$. On considère alors la quantité : $P^\alpha = \frac{1}{c} \int T^{\alpha 0} d^3\mathcal{V}$.

• Or $\omega = T^{00}$ est la densité volumique d'énergie, donc son intégrale cP^0 est l'énergie du système.

• Par ailleurs $\pi^k = c\, T^{0k}$ est la densité volumique de courant d'énergie ; la variation de l'énergie d'un système est égale au flux entrant du courant d'énergie associé.

• De façon analogue $\frac{1}{c} T^{i0}$ est la densité volumique d'impulsion et T^{ik} est la densité volumique de courant d'impulsion. Ainsi l'intégrale P^i correspond à l'impulsion du système ; la variation de l'impulsion d'un système est égale au flux entrant du courant d'impulsion associé.

◊ remarque : dans la mesure où on peut utiliser une forme symétrique du tenseur énergie-impulsion, la densité de courant d'énergie est égale à la densité d'impulsion multipliée par c^2.

2. • L'ajout à $T^{\alpha\beta}$ d'une expression $\partial_\gamma \Psi^{\alpha\beta\gamma}$ antisymétrique sur $\beta\gamma$ ajoute aux intégrales (dans un volume $\mathcal{V}$ contenant le système) : $\int \partial_\gamma \Psi^{\alpha\beta\gamma}\, dS_\beta = \frac{1}{2} \int (\partial_\gamma \Psi^{\alpha\beta\gamma}\, dS_\beta - \partial_\beta \Psi^{\alpha\beta\gamma}\, dS_\gamma) = \frac{1}{2} \int \Psi^{\alpha\beta\gamma}\, dS^*_{\beta\gamma}$ où $dS^*_{\beta\gamma}$ décrit la surface entourant $\mathcal{V}$.

• Dans la mesure où la surface d'intégration est (par construction) au delà des limites du système, l'intégrale y est nulle, donc cela ne change pas les énergies et impulsions calculées par intégration.

3. • Le tenseur du moment cinétique peut s'écrire “classiquement” :

$$M^{\alpha\beta} = \int (x^\alpha \, dP^\beta - x^\beta \, dP^\alpha) = \frac{1}{c} \int (x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma}) dS_\gamma \; .$$

• La conservation de ce moment cinétique correspond au fait qu'il n'est pas modifié si on change la surface d'intégration dS_γ (à travers laquelle on calcule le flux), c'est-à-dire que l'intégrale volumique de la divergence du vecteur intégré est nulle : $\partial_\gamma(x^\alpha \, T^{\beta\gamma} - x^\beta \, T^{\alpha\gamma}) = 0$. Puisque $\partial_\gamma T^{\sigma\gamma} = 0$, il reste juste une condition de symétrie : $T^{\beta\alpha} - T^{\alpha\beta} = 0$.

VI. Définition symétrique du tenseur énergie-impulsion

1. • L'action s'exprimant en fonction de variables et de leurs dérivées premières seulement, on peut supposer qu'il en est de même pour la dépendance par rapport à la métrique.

• Lors d'un changement de coordonnées infinitésimal correspondant à $\delta g_{\mu\nu}$, la variation de l'action peut alors l'écrire sous la forme : $\delta \mathcal{S} = \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial(\Lambda\sqrt{|g|})}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\Lambda\sqrt{|g|})}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \delta(\partial_\rho g_{\mu\nu}) \right) d^4x$.

• On peut considérer : $\int \frac{\partial(\Lambda\sqrt{|g|})}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\rho(\delta g_{\mu\nu}) \, d^4x = \int \partial_\rho\left(\frac{\partial(\Lambda\sqrt{|g|})}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu} \right) d^4x - \int \partial_\rho\left(\frac{\partial(\Lambda\sqrt{|g|})}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \right) \delta g_{\mu\nu} \, d^4x$.

Le premier terme peut s'écrire comme l'intégrale de la divergence du 4-vecteur $\mathfrak{V}^\rho = \frac{\partial(\Lambda\sqrt{|g|})}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu}$, égale au flux du 4-vecteur à travers l'hyper-surface bordant la limite d'intégration.

• Ce terme est donc nul si on intègre sur l'ensemble de la zone où se situe le système puisque Λ s'annule aux bornes. Sinon, pour étudier une partie d'un système plus étendu, on peut l'annuler en considérant des variations $\delta g_{\mu\nu}$ qui s'annulent au niveau des limites.

• Ceci donne : $\delta \mathcal{S} = \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial(\Lambda\sqrt{|g|})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\rho\left(\frac{\partial(\Lambda\sqrt{|g|})}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \right) \right) \delta g_{\mu\nu} \, d^4x$.

• En posant : $\frac{1}{2}\sqrt{|g|} \, T^{\mu\nu} = \partial_\rho\left(\frac{\partial(\Lambda\sqrt{|g|})}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \right) - \frac{\partial(\Lambda\sqrt{|g|})}{\partial g_{\mu\nu}}$ on peut écrire : $\delta \mathcal{S} = -\frac{1}{2c} \int T^{\mu\nu} \, \delta g_{\mu\nu} \sqrt{|g|} \, d^4x$.

◊ remarque : ceci est lié au théorème de Nœther : à l'invariance associée aux changements de coordonnées correspond un “courant” conservé : il s'agit ici du tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$.

2. • La relation de définition est symétrique pour $g_{\mu\nu}$ donc le tenseur $T^{\mu\nu}$ ainsi défini est symétrique.

3. • La nullité de $\delta \mathcal{S}$ pour $\delta g_{\mu\nu}$ quelconque pourrait sembler imposer $T^{\mu\nu} = 0$, mais ce n'est pas le cas car alors le terme du champ gravitationnel interviendrait aussi (on obtiendrait les équations d'Einstein) ; en fait ici les $\delta g_{\mu\nu}$ ne sont pas indépendants (il n'y a que quatre coordonnées qui changent, ce qui correspond à un changement de jauge pour un “espace-temps” fixé). Inversement, cela indique que l'expression de $T^{\mu\nu}$ n'est pas unique ; c'est pour cela qu'il est intéressant d'en trouver, par cette méthode, une formulation symétrique.

◊ remarque : inversement, on pourrait se demander si on a le droit d'utiliser une description incluant la gravitation relativiste, puis de se limiter au cas sans effet gravitationnel (sachant qu'en relativité générale toute énergie-impulsion crée un champ gravitationnel) ; le résultat des calculs montre qu'en pratique la méthode est valide de ce point de vue (la méthode utilisée raisonne pour un “espace-temps” fixé et rien n'interdit de l'appliquer à un espace-temps “plat”).

◊ remarque : par contre, montrer que $\partial_\gamma T^{\alpha\gamma} = 0$ (conservation du “courant”) est ici compliqué sans une connaissance minimum de la géométrie riemannienne.

4. • On peut montrer que $dg = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} dg_{\mu\nu} = g\, g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$ en considérant $\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}$ correspond à la matrice des cofacteurs de $g_{\mu\nu}$ dans le déterminant. Or la matrice inverse de $g_{\mu\nu}$ est $g^{\mu\nu}$ puisque $g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta_\mu{}^\rho$; mais cette matrice inverse est égale à la matrice des cofacteurs divisée par le déterminant : $g^{\mu\nu} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}$. On en déduit finalement : $\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|}\; g^{\mu\nu}$.

• Dans la mesure où on a choisi comme variables électromagnétiques A_α et $\partial_\beta A_\alpha$, la densité lagrangienne électromagnétique doit ici s'écrire : $\Lambda = -\frac{1}{4\mu_0} g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}$ (on raisonne dans ce cas sur l'effet des variables “complémentaires” associées à la métrique).

• Pour les termes exprimés avec $g^{\mu\nu}$ (au lieu de $g_{\mu\nu}$) on peut utiliser :

$$d(\delta_\alpha{}^\gamma) = d(g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}) = g_{\alpha\beta}\, dg^{\beta\gamma} + g^{\beta\gamma}\, dg_{\alpha\beta} = 0 \;;\; dg^{\mu\nu} = -\, g^{\mu\alpha}\, g^{\beta\nu}\, dg_{\alpha\beta} \;;$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} dg^{\mu\nu} = -\frac{\partial\Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\mu\alpha}\, g^{\beta\nu}\, dg_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Lambda}{\partial g_{\alpha\beta}}\, dg_{\alpha\beta} \;;\; \frac{\partial\Lambda}{\partial g_{\alpha\beta}} = -\, g^{\mu\alpha}\, g^{\beta\nu} \frac{\partial\Lambda}{\partial g^{\mu\nu}}.$$

• Par la méthode considérée, on obtient : $\frac{\partial(\Lambda\sqrt{|g|})}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\partial\Lambda}{\partial g_{\mu\nu}} \sqrt{|g|} + \Lambda \frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}}$ avec :

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{4\mu_0} (-\, g^{\mu\kappa}\, g^{\lambda\nu})\, (g^{\beta\delta} \frac{\partial}{\partial g^{\kappa\lambda}} g^{\alpha\gamma} + g^{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial g^{\kappa\lambda}} g^{\beta\delta})\, F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} \;;$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{4\mu_0} g^{\mu\kappa}\, g^{\lambda\nu}\, (g^{\beta\delta}\, \delta^\alpha{}_\kappa \delta^\gamma{}_\lambda + g^{\alpha\gamma}\, \delta^\beta{}_\kappa \delta^\delta{}_\lambda)\, F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} = \frac{1}{4\mu_0} (g^{\beta\delta}\, g^{\mu\alpha}\, g^{\gamma\nu} + g^{\alpha\gamma}\, g^{\mu\beta}\, g^{\delta\nu})\, F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} \;;$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2\mu_0} g_{\alpha\beta}\, F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta} \;;$$

$$\frac{\partial(\Lambda\sqrt{|g|})}{\partial g_{\mu\nu}} = \sqrt{|g|}\, \frac{1}{2\mu_0} g_{\alpha\beta}\, F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta} - \sqrt{|g|}\, \frac{1}{8\mu_0}\, g^{\mu\nu}\, F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}.$$

• Par ailleurs : $\frac{\partial(\Lambda\sqrt{|g|})}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} = \sqrt{|g|}\, \frac{\partial(\Lambda)}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} = 0$; $\partial_\rho\Big(\frac{\partial(\Lambda\sqrt{|g|})}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})}\Big) = 0$.

• Au total : $T^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} (g_{\alpha\beta}\, F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta} - \frac{1}{4}\, g^{\mu\nu}\, F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})$; puis en revenant à la métrique cartésienne :

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} (\eta_{\alpha\beta}\, F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta} - \frac{1}{4}\, \eta^{\mu\nu}\, F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}).$$