# ÉLECTROMAGNÉTISME RELATIVISTE - exercices

## I. Invariants électromagnétiques

1. • Démontrer la relation : $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = -2.\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2\right)$.

2. • Démontrer la relation : $F^{*\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = -4\frac{\vec{E}}{c}\cdot\vec{B}$.

## II. Invariants électromagnétiques

• Montrer que la quantité : $F^{*\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = -4\frac{\vec{E}}{c}\cdot\vec{B}$ peut s'écrire comme la 4-divergence d'un 4-vecteur.

## III. Invariants électromagnétiques

1. • À partir de la transformation de Lorentz pour le quadri-potentiel, établir les relations de transformation pour les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

2. a) Établir les relations de transformation pour le vecteur complexe : $\vec{\mathfrak{F}} = \frac{\vec{E}}{c} + i\,\vec{B}$.

b) Cette transformation correspond à une rotation (d'un angle complexe) ; en déduire les deux invariants quadratiques du champ électromagnétique.

## IV. Invariance de jauge et théorème de Nœther

• En considérant un changement de jauge infinitésimal $A_\alpha \to A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha\epsilon$, montrer que l'invariance de l'action implique la conservation du courant $j^\alpha$.

## V. Détermination du tenseur énergie-impulsion

1. • Expliquer pourquoi la quantité $P^\alpha = \frac{1}{c}\int T^{\alpha\beta}\,dS_\beta$, intégrée sur une hyper-surface contenant tout l'espace, où au moins toute la partie de l'espace occupée par le système étudié, correspond à la quadri-impulsion de ce système.

2. • Montrer que l'ajout au tenseur énergie-impulsion d'une expression (fonction des caractéristiques du système) de la forme $\partial_\gamma\Psi^{\alpha\beta\gamma}$ antisymétrique sur $\beta\gamma$ ne modifie pas les énergies et impulsions déduites par intégration.

3. • Déterminer dans quelles conditions on peut en déduire une loi de conservation du moment cinétique.

## VI. Définition symétrique du tenseur énergie-impulsion

• On peut définir le tenseur énergie-impulsion $T_{\alpha\beta}$ d'après la variation de l'action en fonction des variations de la métrique, notée $g_{\alpha\beta}$. Il ne s'agit pas de raisonner dans le cadre de la relativité générale, mais pour des changements de coordonnées en relativité restreinte (l'espace-temps est supposé "plat").

◊ remarque : bien que l'espace reste "plat", on considère ici que la métrique n'est plus forcément égale à $\eta_{\alpha\beta}$, comme c'est par exemple le cas en coordonnées sphériques.

• Lors d'une telle transformation, en partant des coordonnées cartésiennes, l'élément d'intégration invariant n'est plus $d^4x$ mais $d^4\mathcal{V} = \sqrt{|g|}\, d^4x$ où $g$ est le déterminant de la matrice $g_{\alpha\beta}$. En effet, il faut multiplier par l'inverse $\frac{1}{J}$ du jacobien (déterminant de la matrice jacobienne associée au changement de coordonnées) et on peut montrer que $g = -\frac{1}{J^2}$. L'action s'écrit donc : $\mathcal{S} = \frac{1}{c}\int \Lambda \sqrt{|g|}\, d^4x$.

◊ remarque : par exemple pour des coordonnées cylindriques d'axe Ox : $d^4\mathcal{V} = c\,dt\,.\,dx\,.\,dr\,.\,r\,d\theta$ correspond à $\sqrt{|g|} = r$.

1. • Montrer que, lors d'un changement de coordonnées infinitésimal correspondant à $\delta g_{\mu\nu}$, la variation de l'action peut l'écrire sous la forme : $\delta\mathcal{S} = -\frac{1}{2c}\int T^{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} \sqrt{|g|}\, d^4x$ ; préciser l'expression du tenseur $T^{\mu\nu}$ (il s'agit du tenseur énergie-impulsion).

2. • Justifier que le tenseur $T^{\mu\nu}$ ainsi défini est symétrique.

3. • Lors d'un changement de coordonnées, l'action (scalaire) doit être invariante ; or, pour une transformation infinitésimale, on peut l'écrire sous la forme : $\delta\mathcal{S} = -\frac{1}{2c}\int T^{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} \sqrt{|g|}\, d^4x = 0$. Justifier que cette condition n'impose pas la nullité de $T^{\mu\nu}$.

4. • Calculer par cette méthode le tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique.

   ◊ indication : on peut montrer que : $dg = g\, g^{\mu\nu}\, dg_{\mu\nu}$.