

# Gravitation répulsive et “trous noirs”

Jean-Michel Laffaille

(Angers, France)

laffaille.jean-michel@orange.fr

## Résumé

En relativité générale, lors de l'étude du champ de gravitation central symétrique, un soin attentif dans l'interprétation physique des solutions mathématiques résout certaines difficultés liées à l'interprétation des coordonnées et met en évidence des situations où la gravitation est répulsive. On en déduit l'impossibilité d'existence des “trous noirs” stellaires au sens simpliste de cette expression. Une modélisation simplifiée, mais probablement qualitativement efficace, permet de suggérer une interprétation de la nature des candidats “trous noirs” galactiques, voire même une réinterprétation du big-bang.

## 1. Introduction

Les dix équations du champ de gravitation [1, 2]  $(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = \chi T^{\alpha\beta})$  ne sont pas indépendantes. Ceci laisse une certaine liberté de choix de coordonnées.

Pour un astre à symétrie sphérique, la forme la plus générale peut s'écrire :

$$ds^2 = A(r, t) c^2 dt^2 + B(r, t) c dt dr - C(r, t) dr^2 - D(r, t) [d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2].$$

Dans le cas statique, on peut utiliser une métrique de la forme :

$$ds^2 = A(r) c^2 dt^2 - C(r) dr^2 - D(r) [d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2].$$

L'information gravitationnelle est en fait a priori contenue dans les expressions  $D(r)$  pour ce qui concerne la géométrie de l'espace et  $A(r)$  pour ce qui concerne le temps ; l'expression  $C(r)$  ne faisant que dépendre du choix de la variable radiale utilisée.

On peut choisir les notations “classiques” pour lesquelles  $D(r) = r^2$  ; ceci consiste à considérer qu'en observant l'astre de l'extérieur, on le perçoit par son périmètre, ici égal à  $2\pi r$  comme en géométrie euclidienne.

Toutefois, en procédant ainsi, on reporte l'information géométrique de  $D(r)$  dans la façon dont varie la coordonnée  $r$  en fonction de la position dans l'espace. Ceci n'est pas interdit, mais il faut alors étudier soigneusement l'interprétation physique de la métrique. Il peut en particulier être prudent de vérifier qu'on retrouve les mêmes résultats avec d'autres notations (ce que prévoit l'invariance relativiste).

On peut choisir les coordonnées "isotropes", pour lesquelles  $D(r) = C(r) r^2$ . On notera dans ce cas :  $ds^2 = A(r) c^2 dt^2 - \underline{C}(r) \{dr^2 - \underline{r}^2 [d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2]\}$ .

On peut choisir les coordonnées "radiales", pour lesquelles  $C(r) = 1$  ; ceci consiste à choisir comme variable radiale la distance au centre de l'astre (non mesurable à l'intérieur). Les calculs sont généralement peu simples avec cette variable, qu'on notera  $\rho$ , mais on peut l'utiliser pour certaines comparaisons.

## 2. Étude du cas extérieur

### 2.1. Mise en évidence de l'ambiguïté de certaines notations

Avec les notations "classiques", la résolution des équations du champ donne :  $C = \frac{1}{A}$  puis  $A = 1 - \frac{r_s}{r}$  avec  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ . Une caractéristique importante est l'existence de la singularité pour  $r = r_s$ , telle que pour  $r < r_s$  la variable  $t$  cesse d'être du type temporel.

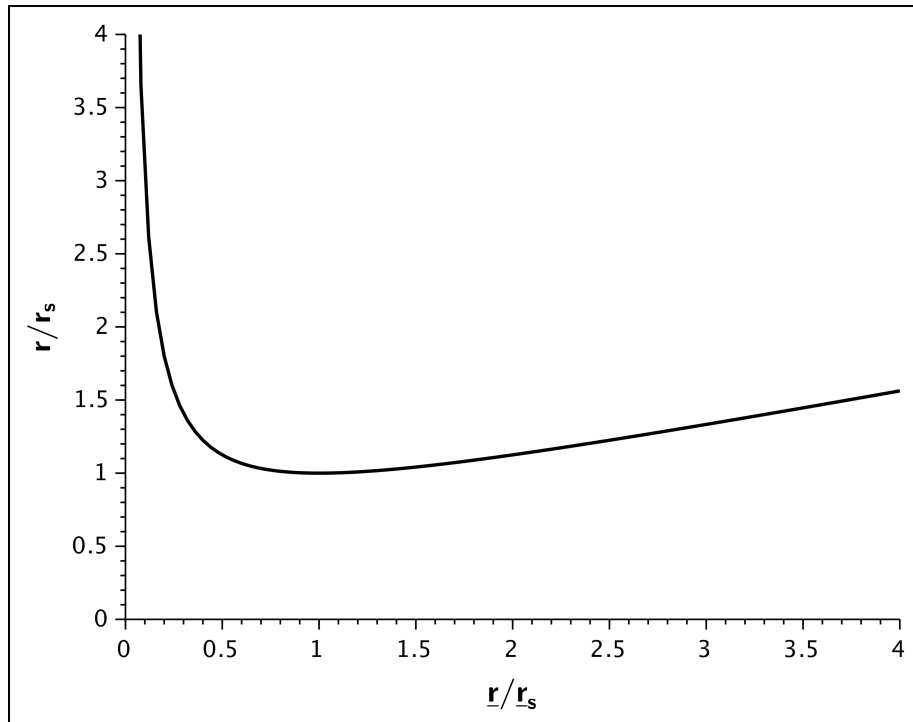
De nombreux artifices ont été proposés pour contourner cette difficulté [1, 2] (par exemple les coordonnées de Finkelstein, ou de Kruskal), mais une étude détaillée montre que c'est en fait inutile.

Avec les notations "isotropes", on obtient  $\underline{C}(r) = \left(1 + \frac{r_s}{\underline{r}}\right)^4$  et  $A(\underline{r}) = \frac{(\underline{r} - r_s)^2}{(\underline{r} + r_s)^2}$ ,

avec  $\underline{r}_s = \frac{r_s}{4}$ . Dans ce cas, la variable  $t$  reste du type temporel ; ce comportement différent est incompatible avec l'invariance relativiste, ce qui suggère une mauvaise interprétation.

Le changement de notation correspond à :  $r = \underline{r} \cdot \left(1 + \frac{r_s}{\underline{r}}\right)^2$ , mais inversement :

$$\underline{r} = r \cdot \frac{1}{2} \left( r - \frac{r_s}{2} \pm \sqrt{r \cdot (r - r_s)} \right).$$



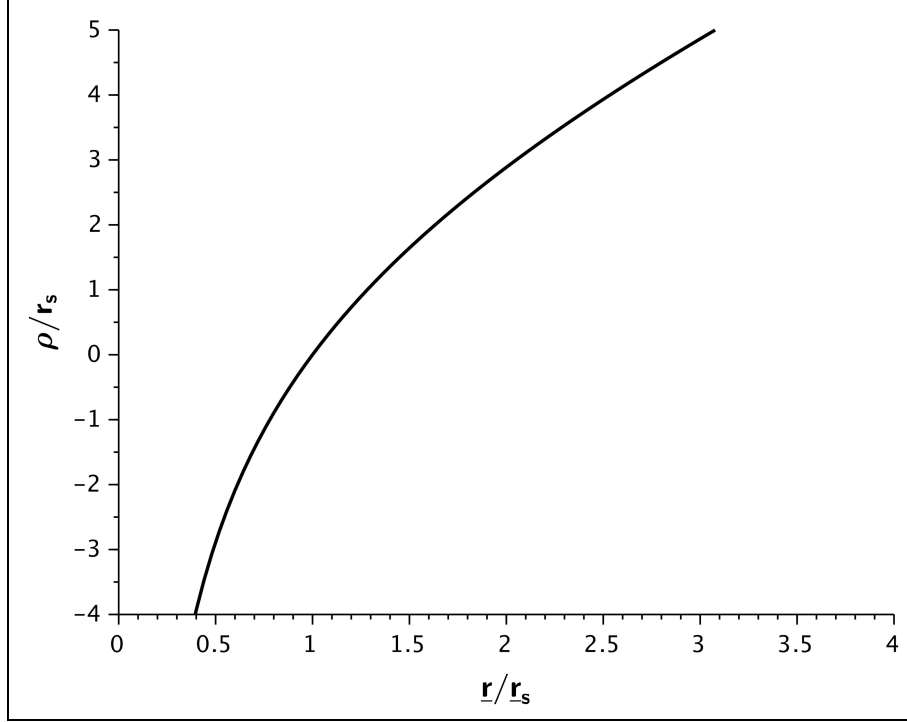
**Fig. 1** : variations (en notations réduites) de la variable radiale “classique” en fonction de la variable radiale “isotrope”.

Ceci est non bijectif (fig. 1), donc a priori impossible, à moins d'une réinterprétation soignée.

## 2.2. Distances radiales

On peut comparer la coordonnée radiale “isotrope” et la distance radiale  $\rho$  :

$$\rho = r_s \ln \left( \frac{r^2}{r_s^2} \right) + r \cdot \left( 1 - \frac{r_s^2}{r^2} \right) + \text{Cste.}$$

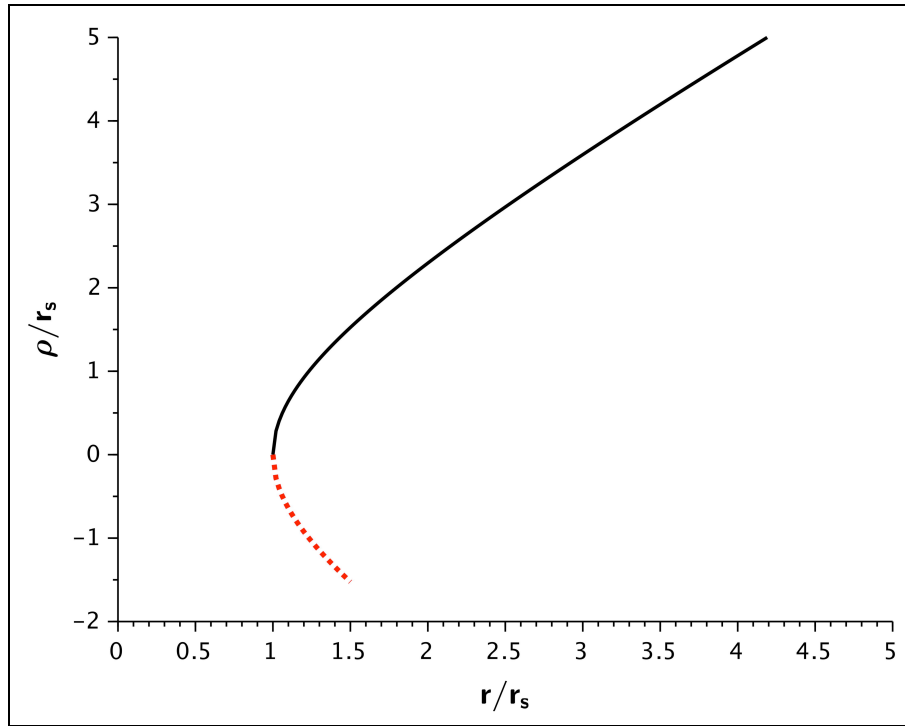


**Fig. 2** : variations (en notations réduites) de la distance radiale en fonction de la variable radiale “isotrope”.

Ceci montre à l'occasion (fig. 2) que la coordonnée  $r$  ne peut pas raisonnablement être utilisée jusqu'à  $r = 0$ , mais cela fait forcément intervenir l'étude à l'intérieur de l'astre.

On obtient pour la coordonnée  $r$  “classique” (compte tenu de son sens de

variation non monotone) :  $\rho = \pm \left( r_s \operatorname{argth} \left( \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \right) + r \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \right) + \text{Cste.}$



**Fig. 3** : variations (en notations réduites) de la distance radiale en fonction de la variable radiale “classique”.

Même en omettant sur le graphique la constante d'intégration qui intervient dans cette relation (selon l'intérieur de l'astre), il commence à apparaître (fig. 3) que l'étude de la singularité en considérant  $r < r_s$  est inappropriée : quand on se rapproche du centre de l'astre au delà de  $r = r_s$ , la coordonnée  $r$  augmente (ce qui rend plus délicate l'interprétation de cette variable).

### 2.3. Chute libre radiale

En notations “isotropes”, la métrique limitée au mouvement radial peut s'écrire :  $ds^2 = A(r) c^2 dt^2 - C(r) dr^2$ . On en déduit les équations du mouvement géodésique :

$$c \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{A'}{A} c \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{A'}{2C} c^2 \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{C'}{2C} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 = 0.$$

L'intégration donne :  $A c \frac{dt}{ds} = \sqrt{A_0}$  ;  $\frac{dr}{ds} = \frac{1}{\sqrt{C}} \sqrt{\frac{A_0}{A} - 1}$  (avec  $A_0 = A(r_0)$ ).

La durée locale est :  $dt_\ell = \sqrt{A} dt$  ; la distance est :  $d\ell = \sqrt{C} dr$  ; la vitesse est par conséquent :  $v = \frac{d\ell}{dt_\ell} = \sqrt{\frac{C}{A}} \frac{dr}{dt} = c \sqrt{1 - \frac{A}{A_0}}$ .

On constate que la vitesse de chute tend vers  $c$  quand  $r \rightarrow r_s$ . Si on suppose alors que le point continue son mouvement au delà de cette limite, on constate que  $A(r) = \left( \frac{r - r_s}{r + r_s} \right)^2$  s'annule puis redevient positif : sous l'effet de ce qui devrait être l'attraction de l'astre, la vitesse diminue ! On obtient le même résultat en coordonnées classiques, avec  $A(r) = \frac{r - r_s}{r}$  fonction monotone, mais avec (et seulement avec)  $r$  augmentant quand le point se rapproche plus près de l'astre que la singularité. Ceci décrit un effet gravitationnel répulsif.

Puisque les effets gravitationnels doivent varier de façon continue, on peut en déduire que, pour tout astre statique, la singularité est nécessairement intérieure. Sinon, la matière en surface subirait un champ gravitationnel répulsif et serait expulsée. Ainsi, au moins dans le cas statique décrit par la relativité générale, l'existence de “trous noirs” stellaires au sens simpliste paraît impossible.

Toutefois, puisqu'on observe des astres ressemblant à des “trous noirs”, une étude du cas intérieur peut être utile pour chercher à comprendre leur nature.

### 3. Étude du cas statique incluant l'intérieur

#### 3.1. Modèle du fluide "simple"

Les équations du champ peuvent s'écrire  $R^{\alpha\beta} = \chi \cdot (T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} T)$ .

Pour un fluide "simple" :  $T^{\alpha\beta} = (p + \varepsilon_0) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta}$ , avec  $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$  et où  $p$  et  $\varepsilon_0 = \mu_0 c^2$  désignent la pression et la densité d'énergie mesurées dans le référentiel propre du fluide, ici immobile (masse volumique  $\mu = \mu_0$ ).

Avec une métrique de la forme :  $ds^2 = A(r) c^2 dt^2 - C(r) dr^2 - D(r) d\Omega^2$ , on obtient :  $u^0 = \frac{1}{\sqrt{A}}$  et  $u^k = 0$ .

Ceci correspond à :  $T_{00} = \frac{1}{2} g_{00} T = A \frac{\varepsilon + 3p}{2}$  ;  $T_{11} = \frac{1}{2} g_{11} T = C \frac{\varepsilon - p}{2}$  ;  
 $T_{22} = \frac{1}{2} g_{22} T = D \frac{\varepsilon - p}{2}$  ;  $T_{33} = \frac{1}{2} g_{33} T = D \sin^2(\theta) \frac{\varepsilon - p}{2}$ .

Par ailleurs :  $R_{00} = \frac{A''}{2C} - \frac{A'}{2C} \cdot \left( \frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} - \frac{D'}{D} \right)$  ;  
 $R_{11} = -\frac{A''}{2A} - \frac{D''}{D} + \frac{A'}{2A} \cdot \left( \frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} \right) + \frac{D'}{D} \cdot \left( \frac{C'}{2C} + \frac{D'}{2D} \right)$  ;  
 $R_{22} = -\frac{D''}{2C} - \frac{D'}{2C} \cdot \left( \frac{A'}{2A} - \frac{C'}{2C} \right) + 1$  ;  $R_{33} = R_{22} \sin^2(\theta)$ .

On obtient ainsi deux combinaisons permettant de simplifier :

$$\frac{D'}{2CD} \cdot \left( \frac{A'}{A} + \frac{D'}{2D} \right) - \frac{1}{D} = \chi p ; \quad -\frac{D''}{CD} + \frac{D'}{2CD} \cdot \left( \frac{C'}{C} + \frac{D'}{2D} \right) + \frac{1}{D} = \chi \varepsilon.$$

La prise en compte de la pression  $p = p(r)$  nécessite une équation supplémentaire. La conservation de l'énergie-impulsion peut s'écrire :  $D_\beta T^{\alpha\beta} = 0$  ;

on en déduit la loi de la statique des fluides :  $p' = -(\varepsilon + p) \frac{A'}{2A}$ .

### 3.2. Expression globale de la métrique

On peut utiliser ici les coordonnées “classiques” puisqu'on a montré comment les utiliser (les notations “isotropes” donnent les mêmes résultats).

Dans le cas particulier  $D = r^2$  on obtient  $D' = 2r$  et  $D'' = 2$  ; ainsi :

$$\frac{1}{Cr} \cdot \left( \frac{A'}{A} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \chi p ; \quad \frac{1}{C} - \frac{rC'}{C^2} = 1 - \chi \varepsilon r^2.$$

La seconde équation conduit à :  $\frac{r}{C} = r - \chi c^2 \int_0^r \mu(r') r'^2 dr'$ . On peut poser :

$$M(r) = \int_0^r \mu(r') 4\pi r'^2 dr' \quad \text{et} \quad a(r) = \frac{\chi c^2}{4\pi} M(r) = \frac{2G}{c^2} M(r). \quad \text{La relation précédente}$$

peut alors s'écrire sous la forme :  $C(r) = \frac{r}{r - a(r)}.$

Le report dans la première équation donne, avec la loi de la statique :

$$p' = - \frac{\varepsilon + p}{2} \frac{a(r) + \chi r^3 p}{r(r - a(r))}.$$

Ainsi, la connaissance de  $\mu(r)$  permet de calculer  $a(r)$  et  $C(r)$  en intégrant depuis  $a(0) = 0$ , puis  $p(r)$  en intégrant depuis  $p(R) = 0$ , puis  $A(r)$  en intégrant d'après la loi de la statique :  $\frac{A'}{A} = - \frac{2p'}{\varepsilon + p}.$

Pour un fluide compressible, la masse volumique dépend toutefois de la pression (et de la température). Il faut alors supposer une loi de compressibilité (relation entre  $\mu$  et  $p$ ) et intégrer le système des deux équations (puis on en déduit  $A$ ).

À l'extérieur de l'astre :  $M = M(R) = \int_0^R \mu(r') 4\pi r'^2 dr' \quad \text{et} \quad r_s = a(R) = \frac{2GM}{c^2} ;$   
ceci redonne :  $C = \frac{r}{r - r_s}$  puis  $A(r) = \frac{1}{C(r)}$  puisque  $A = 1$  à l'infini.



### 3.3. Géométrie spatiale pour une masse volumique uniforme

La résolution littérale n'est pas simple dans le cas intérieur général. On peut procéder par intégration numérique, mais on peut aussi s'intéresser à chercher des hypothèses simplificatrices permettant de mettre en évidence simplement les propriétés physiques prépondérantes.

Avec une masse volumique uniforme (ce qui peut être une bonne approximation qualitative) :  $a(r) = \lambda r^3$  avec  $\lambda = \frac{\chi \mu c^2}{3}$ .

Ainsi  $C = \frac{r}{r - a(r)} = \frac{1}{1 - \lambda r^2}$  ; ce qui impose  $r < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ .

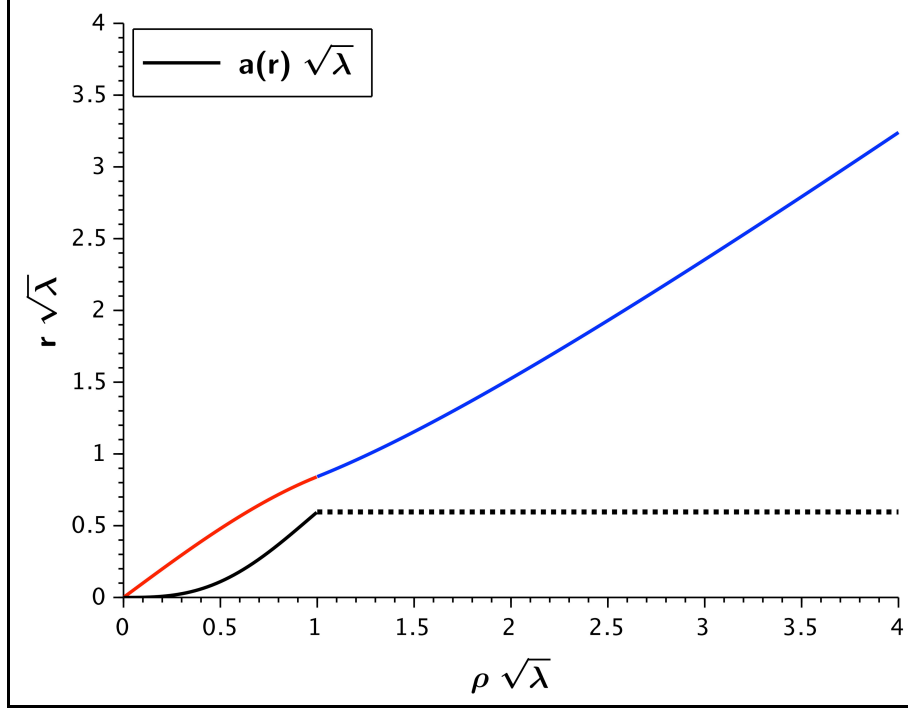
Puisque la distance radiale peut s'écrire  $d\rho = \pm \sqrt{C(r)} dr$ , le "rayon intérieur" (distance au centre) correspond ici à :  $\rho = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin(r\sqrt{\lambda})$ .

Inversement :  $r = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\rho\sqrt{\lambda})$  ; la condition limite  $r < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  correspond donc à  $\rho < \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$  ; on peut vérifier que les dimensions des astres "connus" respectent cette condition.

Mais il est surtout important de comprendre qu'au delà  $r(\rho)$  est décroissant (si une telle solution peut exister physiquement) : la limite peut être atteinte, mais jamais dépassée. Ainsi  $r \geq a(r)$  partout à l'intérieur, de même que  $r \geq r_s$  partout à l'extérieur.

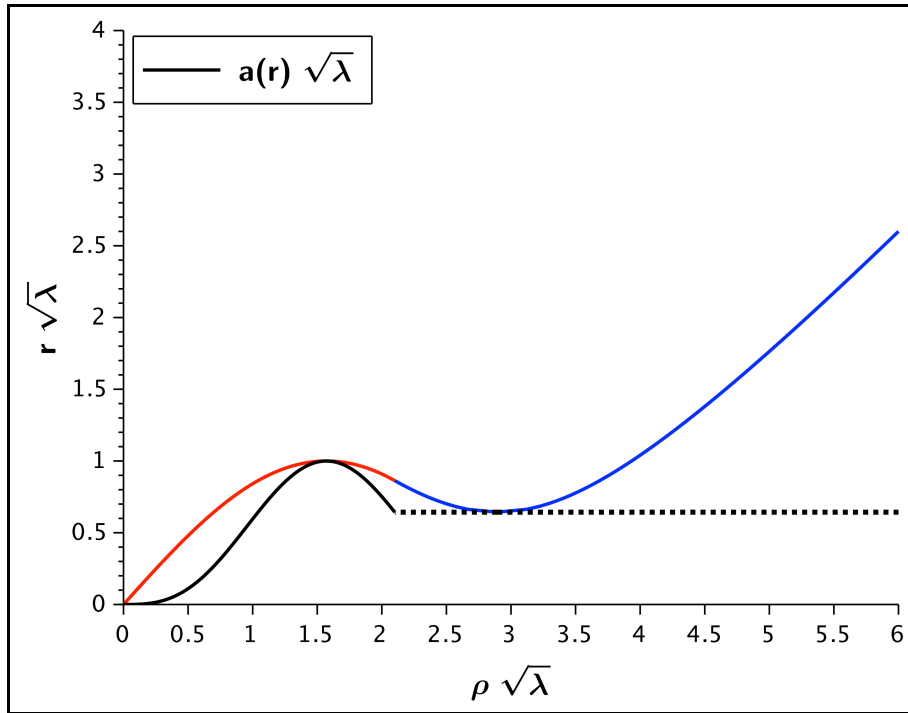
Il semble toutefois à ce niveau qu'aucune contrainte physique n'impose de taille maximum (pour une masse volumique donnée). Peut-il exister des astres de taille et masse telles que la limite soit dépassée ?

Il est alors utile de considérer la variation de  $r$  en fonction de  $\rho$ . Pour  $\lambda$  fixé (les représentations graphiques sont réalisées en prenant  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  comme unité de longueur), les rayons  $R < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  donnent un raccordement simple (fig. 4) ; la singularité n'est jamais atteinte :  $a(r) < r$  en tout point.



**Fig. 4** : variations (en notations réduites) de la variable radiale “classique” en fonction de la distance radiale, dans le cas monotone ; les variations du rayon de Schwarzschild  $a(r)$  associé à la “masse intérieure” sont aussi indiquées pour comparaison.

Les “rayons intérieurs”  $\rho > \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$  correspondent à  $R < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  ; ils donnent “en principe” un raccordement supra-limite (fig. 5), où la singularité  $r = a(r)$  est atteinte à l’intérieur, mais jamais dépassée :  $a(r) \leq r$  et  $r_s < R$ , car  $a(r)$  diminue près de la surface ; en outre la singularité  $r = r_s$  est atteinte aussi à l’extérieur, car  $r$  diminue aussi ensuite, mais  $r_s \leq r$ . Ce cas nécessite toutefois une étude plus détaillée.



**Fig. 5** : variations (en notations réduites) de la variable radiale “classique” en fonction de la distance radiale, dans le cas avec inversion ; les variations du rayon de Schwarzschild  $a(r)$  associé à la “masse intérieure” sont aussi indiquées pour comparaison.

### 3.4. “Champ de gravitation” pour une masse volumique uniforme

Avec une masse volumique uniforme, on obtient par ailleurs :

$$\frac{2\chi p'}{(\lambda + \chi p)(3\lambda + \chi p)} = -\frac{r}{1 - \lambda r^2}.$$

Pour un astre en équilibre, la limite  $p(R) = 0$  conduit à :

$$p = \frac{3\lambda}{\chi} \left( \frac{\sqrt{1 - \lambda r^2} - \sqrt{1 - \lambda R^2}}{3\sqrt{1 - \lambda R^2} - \sqrt{1 - \lambda r^2}} \right).$$

On obtient ensuite  $\frac{A'}{A} = -\frac{2p'}{\varepsilon + p} = \frac{2\lambda r}{\sqrt{1-\lambda r^2}(3\sqrt{1-\lambda R^2} - \sqrt{1-\lambda r^2})}$  ; compte

tenu de la limite :  $A(R) = 1 - \lambda R^2$ , l'intégration donne ainsi :

$$A = \frac{1}{4} \cdot \left( 3\sqrt{1-\lambda R^2} - \sqrt{1-\lambda r^2} \right)^2.$$

Dans les cas simples, avec  $\frac{dr(\rho)}{d\rho} > 0$  partout, c'est-à-dire  $\rho(R) < \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$  et

ainsi  $r \leq R < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ , le numérateur de l'expression de  $p$  reste partout strictement positif.

Il apparaît par contre que la pression ne peut pas toujours être définie dans la zone centrale : l'expression diverge pour  $r \leq r_d = \sqrt{9R^2 - \frac{8}{\lambda}}$ .

Cette limite  $r_d$  en deçà de laquelle la pression ne peut pas être définie correspond aussi à une inversion du sens de la gravitation (minimum nul de  $A$ , divergence négative de  $\ln(A)$ , qui se comporte comme un potentiel).

On peut éviter la divergence en imposant  $R < \sqrt{\frac{8}{9}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \approx \frac{0,94}{\sqrt{\lambda}}$  (ainsi  $r_d < 0$ ), mais il faut alors justifier cette contrainte par un raisonnement physique.

Cette limite signifie l'impossibilité de l'équilibre (a priori supposé dans l'étude du cas statique).

On peut en outre montrer [2] qu'il s'agit d'une limite physique relativement "fondamentale", non restreinte au cas de la masse volumique uniforme. Si cette limite est dépassée, la pression diverge forcément au centre de l'astre, ce qui nécessite une étude dans la limite ultra-relativiste.

### 3.5. Limite ultra-relativiste

Compte tenu de la relation  $\frac{da(r)}{dr} = \chi r^2 \varepsilon$  le cas ultra-relativiste  $p = \frac{\varepsilon}{3}$  permet d'écrire l'équation :  $p' = -\frac{\varepsilon + p}{2} \frac{a(r) + \chi r^3 p}{r(r - a(r))}$  sous la forme :

$$3 a'' r(r - a) = 2 a' (3r - 6a - r a').$$

La seule solution physiquement acceptable respectant la limite  $a(0) = 0$  est :  $a(r) = \frac{3}{7} r$ . Cela correspond à une densité d'énergie  $\varepsilon(r) = \frac{3}{7\chi r^2}$  divergente à l'origine (mais intégrable). La divergence de  $\varepsilon(r)$  à l'origine signifie que la température tend vers l'infini à l'origine (et la pression aussi).

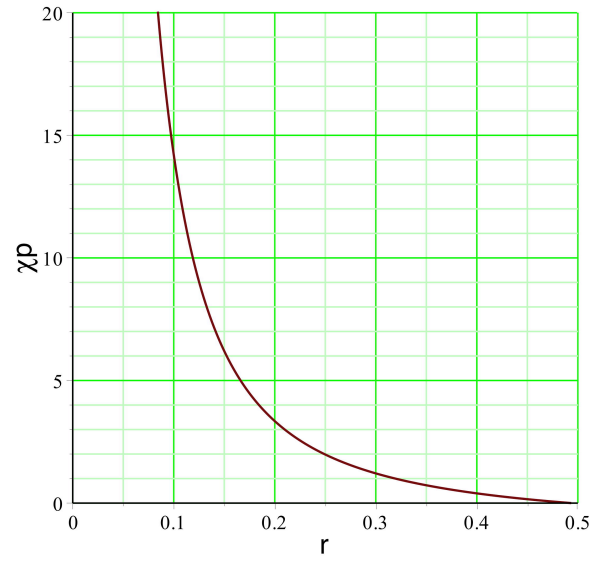
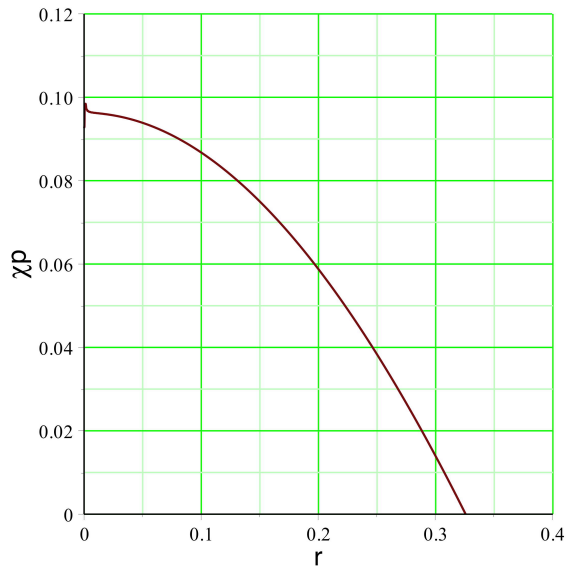
Par contre, aucun astre ne peut être entièrement ultra-relativiste car la pression ainsi calculée ne s'annule qu'à l'infini. Pour décrire la transition vers le comportement ultra-relativiste, il faut ajouter une équation d'état reliant  $\varepsilon$  et  $p$ .

Des résultats intéressants peuvent être obtenus avec un modèle polytropique (avec  $p \propto \varepsilon^{4/3}$  ; [2] partie III.11.5). Il est toutefois utile de remarquer qu'une modélisation rudimentaire peut suffire à retrouver une description qualitative quasi-équivalente. On peut ainsi proposer un raccordement mathématique simple :  $\varepsilon(r) = 3p + \frac{\varepsilon_R^2}{\varepsilon_R + p}$ , avec  $\varepsilon_R = \varepsilon(R)$ .

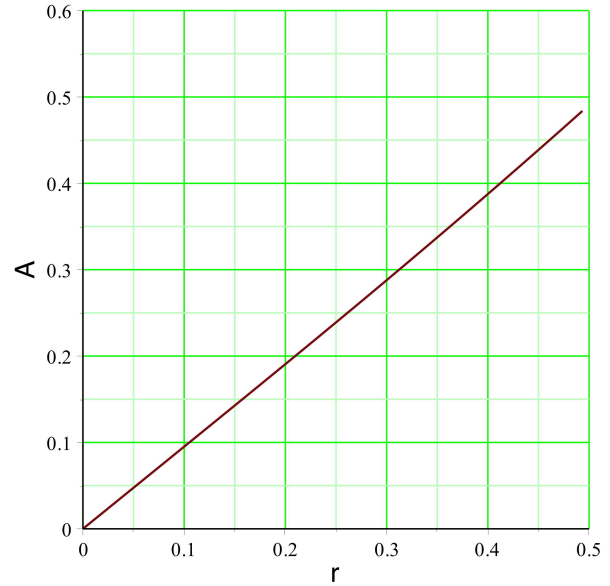
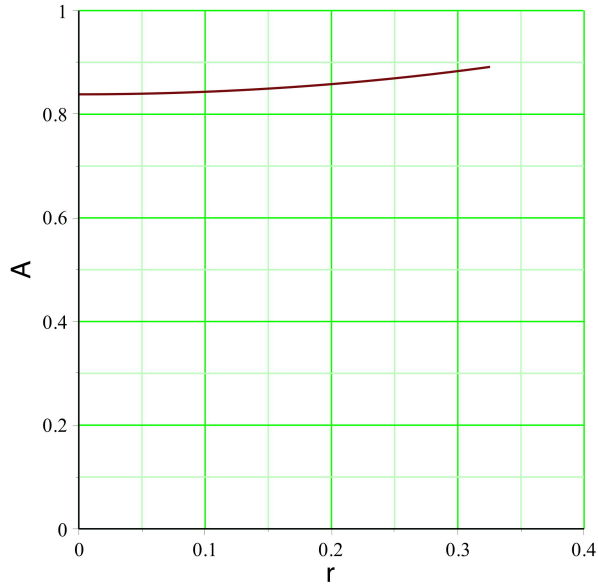
Avec  $\frac{da(r)}{dr} = \chi r^2 \varepsilon(r)$ , le report dans la relation d'équilibre donne l'équation :

$$\begin{aligned} 12 (a'' r - 2 a') (r - a) \cdot \left[ a' + 9\lambda r^2 + \sqrt{a'^2 + 18a'\lambda r^2 - 27\lambda^2 r^4} \right] = \\ = -\sqrt{a'^2 + 18a'\lambda r^2 - 27\lambda^2 r^4} \cdot \left[ 7a' - 9\lambda r^2 + \sqrt{a'^2 + 18a'\lambda r^2 - 27\lambda^2 r^4} \right] \times \\ \times \left( 6a + r \cdot \left[ a' - 9\lambda r^2 + \sqrt{a'^2 + 18a'\lambda r^2 - 27\lambda^2 r^4} \right] \right) \end{aligned}$$

où  $\lambda = \frac{\chi \varepsilon_R}{3}$ . Pour simplifier les notations, on peut prendre  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  comme unité de longueur (ceci correspond numériquement à utiliser  $\lambda = 1$ ).



**Fig. 6.a et b** : variations (en notations réduites) de la pression en fonction de la variable radiale “classique”, dans un cas non relativiste (a) ; dans le cas ultra-relativiste (b).



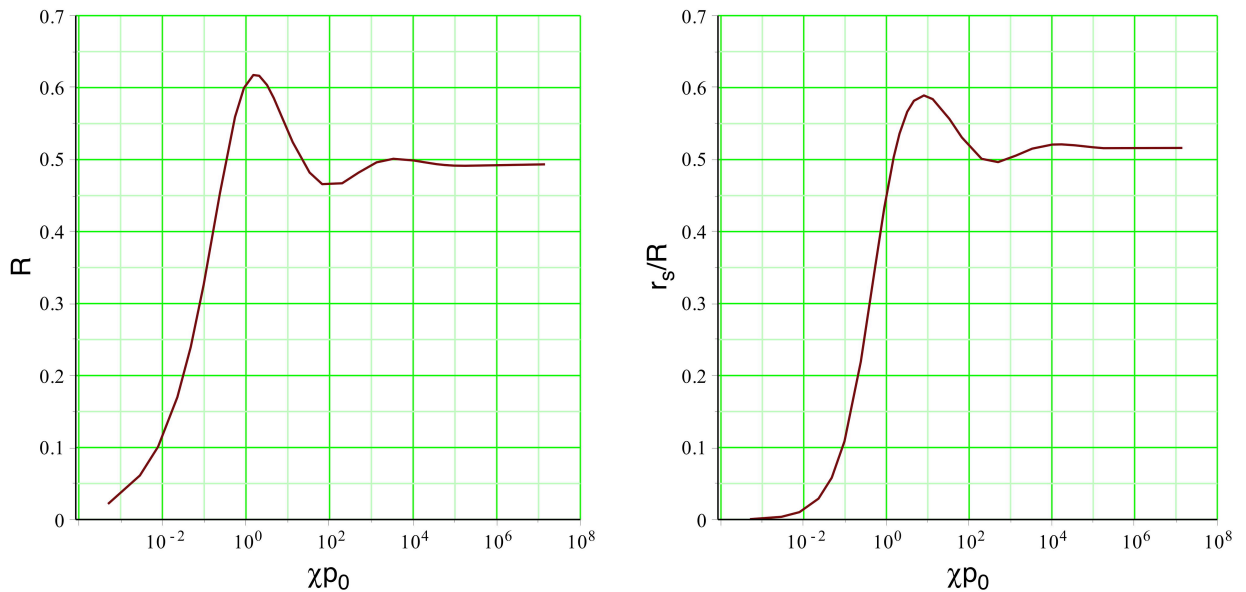
**Fig. 7.a et b** : variations (en notations réduites) du coefficient  $A$  de la métrique en fonction de la variable radiale “classique”, dans un cas non relativiste (a) ; dans le cas ultra-relativiste (b).

Il n'y a pas de solution littérale simple ; l'intégration numérique donne des solutions dont la forme décrit bien la transition depuis celle obtenue avec une faible masse volumique uniforme (fig. 6.a ; l'effet de la pression y est très limité) jusqu'à celle obtenue pour la limite ultra-relativiste (fig. 6.b ; la pression diverge au centre, mais s'annule en surface de l'astre).

Du point de vue de la métrique, la limite ultra-relativiste se caractérise par un coefficient  $A$  tendant vers zéro au centre (fig. 7.a et 7.b). Ainsi, puisque  $\ln(A)$  se comporte comme un potentiel de gravitation, le champ tend vers l'infini au centre (de même que  $\varepsilon$  et  $p$ ).

Pour les “petits” astres (faible pression au centre) on retrouve assez logiquement que le rayon  $R$  (valeur de  $r$  pour laquelle la pression s'annule) augmente en fonction de la pression centrale  $p_0$  (et réciproquement).

Par contre (fig. 8.a), pour les astres dont la pression centrale est plus grande, le rayon  $R$  n'augmente plus (et diminue même transitoirement un peu). Cette propriété, qui peut surprendre, vient du fait que l'augmentation de pression cause une augmentation du “champ de gravitation”, ce qui modifie la métrique.



**Fig. 8.a et b :** variations (en notations réduites) du rayon “classique”  $R$  de l'astre en fonction de la pression au centre (a) ; variations relatives du rayon de Schwarzschild  $r_s/R$  (b).

L'évolution de  $\frac{r_s}{R}$  montre de même (fig. 8.b) une limite  $\approx 0,55 < 1$  ; ceci signifie que la limite  $r_s = a(R) = R$  correspondant à la formation des trous noirs n'est jamais atteinte.

Lors de l'intégration numérique, l'ajustement des constantes de façon à respecter les conditions aux limites suggère que ce comportement caractéristique est uniquement dû à l'approche de la limite ultra-relativiste. Il s'agit d'une solution "instable" : même si on impose d'importantes modifications au centre, la solution converge vers une limite pratiquement identique à la périphérie. Inversement, de faibles perturbations en surface peuvent provoquer une déstabilisation notable du centre de l'astre. Ainsi, tout astre dont la partie centrale deviendrait ultra-relativiste serait instable.

### 3.6. Astre dépassant la limite

Une question se pose alors immanquablement : que se produit-il si, à l'occasion des mouvements cosmiques, une accumulation de matière dépasse à un instant donné la limite précédente ?

La pression infinie suggère l'apparition d'une onde de choc, aussi violente que celles des supernova, mais tout dépend en fait de la façon dont la limite est dépassée.

Dans certains cas, la limite est dépassée "en douceur" : la matière provenant d'une étoile compagnon binaire tombe progressivement en spirale de plus en plus resserrée et forme un disque d'accrétion.

Cette matière atteint le sol à une vitesse proche de celle de la lumière, or cette matière ne peut s'accumuler car l'astre devient instable : sous l'effet de l'onde de choc, de la matière est violemment éjectée selon l'axe polaire.

Une partie de l'énergie de la matière incidente est dissipée par des frottements lors du choc en surface, mais cela tend à élever la température de l'astre, donc aussi sa masse volumique (relativiste), ce qui diminue la taille limite. Ainsi de la matière est éjectée en quantité au moins égale, voire supérieure, à la quantité incidente : la taille de l'astre tend plutôt à diminuer, non par compactification, mais par éjection de matière. L'astre reste toujours en deçà de la limite qui formerait un "trou noir".



La situation est différente si deux astres, déjà proches de la limite, entrent en collision. La violence du choc dépend de sa géométrie : choc frontal ou approche progressive en spirale, mais conduit toujours à une supernova. Une partie restreinte de la matière reste groupée et forme un nouvel astre ; le reste est éjecté selon une géométrie (sphérique ou axiale) qui dépend de celle du choc.

S'il est clair que la violence du choc est suffisante pour expliquer une explosion, un autre effet fondamental intervient : pendant une durée relativement brève, il se forme un amas de matière supérieur à la limite, ce qui implique une inversion du sens de variation de  $r(\rho)$ .

Dans les cas avec "inversion", c'est à dire avec  $\frac{dr(\rho)}{d\rho} < 0$  dans une zone intermédiaire, il y a toujours  $r \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  et  $R < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ , mais  $r > R$  à certains endroits. Le numérateur de l'expression de  $p$  obtenue précédemment ne reste alors pas partout positif ; cette incohérence signifie en fait de même une impossibilité d'équilibre (même si  $R < \sqrt{\frac{8}{9}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ ).

Mais par ailleurs, même s'il n'est pas évident de résoudre le système d'équations complet dans ces conditions, des considérations générales permettent d'en déduire les propriétés physiques à partir d'une solution partielle.

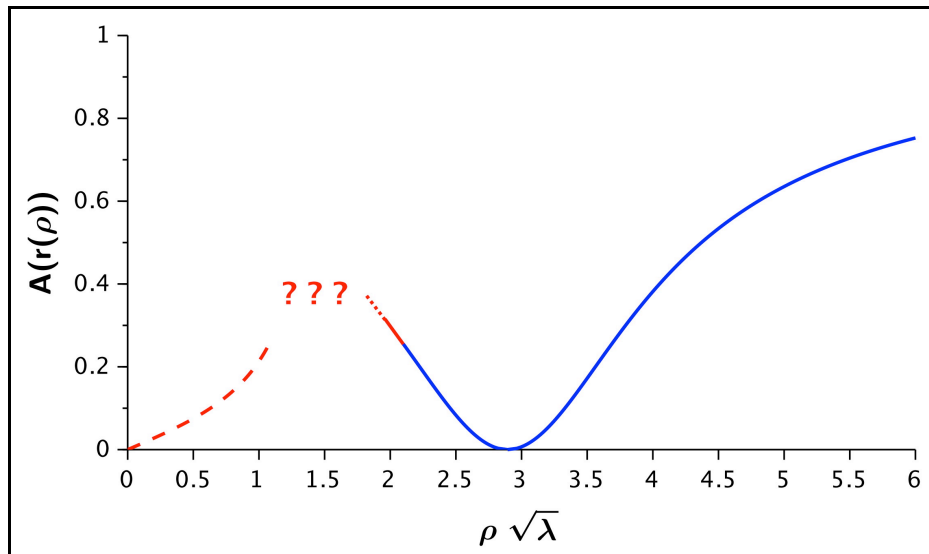
Par comparaison au cas newtonien, l'équation relativiste de la statique exprime que  $\ln(\sqrt{A})$  joue un rôle analogue à celui du potentiel de gravitation :

$$\partial_i p = -(p + \varepsilon_0) \frac{\partial_i A}{2A} = -(p + \varepsilon_0) \partial_i (\ln(\sqrt{A})).$$

Dans la partie extérieure à l'astre, on sait calculer  $A(r(\rho)) = \frac{1}{C(r(\rho))}$  ; en outre, la continuité indique comment se comporte  $A(r)$  à l'intérieur, au voisinage de la surface.

La décroissance du potentiel, dans la zone avec inversion, décrit un champ de gravitation répulsif [3]. Cette propriété se prolonge forcément dans la partie intérieure voisine de la surface (fig. 9) : la matière de surface est éjectée.

Dans ce cas, encore plus que dans celui sans “inversion”, le phénomène aboutit à une onde de choc et à une supernova. Ainsi, tant qu'on suppose valide la relativité générale, il est difficilement imaginable qu'un “trou noir” stellaire puisse subsister assez longtemps pour être observé.



**Fig. 9** : variations (en notations réduites) du coefficient A de la métrique en fonction de la distance radiale (cas avec inversion).

Par conséquent, si dans les conditions sans inversion où la pression centrale tend vers l'infini, on peut imaginer que cela provoque un effondrement sous une forme plus dense que les étoiles à neutrons (étoile à plasma de quarks, environ dix fois plus dense, actuellement seulement hypothétique), il est clair que ceci ne peut pas former un trou noir, mais peut tout au plus causer une inversion, donc dans tous les cas ne peut que finir en supernova.

Compte tenu de ceci, que penser des supposés trous noirs observés indirectement par leur interaction avec une étoile compagne ? Il s'agit très probablement de naines sombres : étoiles à neutrons en fin de vie, dont la masse est très proche de la limite de stabilité et dont le comportement, observé à distance, est quasi identique à celui d'un trou noir.

En fait, pour que la lumière passant au voisinage d'une telle naine sombre lui donne une telle apparence, il n'est pas nécessaire que son rayon  $R$  soit "intérieur" à la singularité en  $r = r_s$  (ce qui correspondrait à un trou noir, mais avec  $R > r_s$  à cause de l'inversion), il suffit que  $r_s < R < \sqrt{\frac{27}{4}} r_s \approx 2,6 r_s$ .

#### 4. "Trou noir" galactique

Inversement, on peut considérer un candidat "trou noir" situé au centre d'une galaxie, en le supposant presque à la limite de stabilité ( $R \approx \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ ). Avec une masse  $M = 2,6 \cdot 10^6 M_S$ , on obtient :  $R \approx 8 \cdot 10^6 \text{ km}$  et  $\mu \approx 2,6 \cdot 10^6 \text{ kg.m}^{-3}$ .

Cette masse volumique est très loin de la concentration maximale que permettent les interactions corpusculaires (et la pression interne ne peut probablement pas expliquer un tel écart). On peut imaginer que ce soit un "gaz" de naines sombres, dont la concentration ne pourrait augmenter car sinon la gravitation deviendrait répulsive en surface.

Cette hypothèse est cohérente avec l'observation de "quasars" : les décalages vers le rouge, caractérisés par  $z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_0}{\lambda_0}$ , découlent de l'expansion de l'univers et de l'effet Einstein (étalement des durées dû au champ de gravitation). La limite de stabilité impose un effet Einstein ne dépassant pas  $z \approx 0,615$  pour les photons émis en surface [6].

Or, un certain nombre de quasars, dont la distance est connue par leur interaction avec des galaxies voisines, semblent avoir une contribution plus importante de l'effet Einstein. Ceci peut s'expliquer plus simplement si les quasars sont constitués de "gaz" d'étoiles : certains des photons sont émis de l'intérieur, donnant un effet Einstein plus important.

Sachant que les galaxies contiennent de la “matière noire” [9], une interprétation possible serait qu'il existe de nombreuses naines sombres, pouvant former un “gaz”. Si, au centre de certaines galaxies, un certain nombre d'étoiles actives se mêlent à un amas d'astres sombres (éventuellement réactivées par des collisions), ceci pourrait aboutir à un quasar. Si, dans d'autres galaxies, se forme un amas sans étoile active, cela pourrait aboutir à un objet sombre supermassif ressemblant à un “trou noir galactique”.

Pour des “constituants” du type étoiles à neutrons ( $\mu \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ kg.m}^{-3}$ ), alors leur distance moyenne serait environ 6000 fois leur rayon ( $R \approx 5 \text{ km}$ ). Cela semble plus ou moins raisonnablement plausible ; d'ailleurs la lumière émise par les quasars pourrait provenir non d'étoiles actives, mais de quelques collisions entre les astres constituant l'amas.

Avec de telles hypothèses, un phénomène resterait à comprendre : les modèles usuels basés sur un “big bang” prévoient une durée de vie de l'univers trop petite pour qu'une aussi grande proportion d'étoiles soient éteintes (environ six fois plus que les étoiles actives).

## 5. Modèles cosmologiques

Si on imagine, à nettement plus grande échelle, un univers contenant des “hyper-amas” de matière, de masse volumique  $\mu \approx 10^{-27} \text{ kg.m}^{-3}$ , à la limite de stabilité, alors leur rayon serait de quelques dizaines de milliards d'années-lumière (et leur masse de l'ordre de  $10^{53} \text{ kg}$ ). C'est ce qu'on considère usuellement comme la taille de l'univers ; ici on suppose ces hyper-amas inclus dans un univers plus grand, contenant ailleurs nettement moins de matière.

Dans le cas où deux tels hyper-amas entreraient en collision ; l'ensemble dépasserait alors la limite et le champ gravitationnel deviendrait violemment répulsif entre les deux sphères singulières où  $r = a(r)$ . Cela correspondrait à un “hyper trou noir”, très instable, donc explosant en hyper-nova.

Toutefois, à une telle échelle, l'explosion serait très lente. Comment apparaîtrait l'espace autour d'un observateur situé dans la zone en expansion ?

Les champs de gravitation locaux n'y seraient pratiquement pas perturbés par le comportement à grande échelle.

Or, l'observateur situé dans la zone en expansion ne recevrait presque aucune lumière ni de la zone interne, ni de la zone externe, masquées chacune par une singularité. La lumière peut passer les singularités au voisinage des "inhomogénéités" locales ("défauts" des singularités) ; elle met toutefois pour cela une durée apparente presque infinie. L'observateur aurait donc probablement l'impression d'être dans un univers limité et en expansion.

Il y aurait éventuellement de plus une difficulté d'interprétation géométrique puisque la propriété  $\frac{dr}{d\rho} < 0$  caractérisant cette zone pourrait donner l'impression de voir du côté "extérieur" ce qui correspond au côté "intérieur" de l'hyper globule (et inversement). L'anisotropie serait-elle flagrante ? Ce type de configurations gagnerait probablement à être étudié plus en détail.

Plusieurs modèles ont été proposés, faisant intervenir une "énergie sombre" se comportant dans certains cas comme une "gravitation répulsive", il semble en fait qu'il n'y ait peut être même pas besoin de chercher de tels artifices [5, 7, 8].

## Références

- [1] L. Landau et E. Lifchitz, “Théorie des champs” (éd. Mir, 1982).
- [2] S. Weinberg, “Gravitation and cosmology” (éd. Wiley, 1972).
- [3] Des modèles ont été proposés comportant un champ de gravitation répulsif au niveau galactique ou cosmique [4, 5], mais non au niveau stellaire.
- [4] Des modèles de trous noirs supermassifs faisant intervenir un effet de gravitation répulsive ont déjà été suggérés, mais en général avec des coordonnées inutilement compliquées : T. W. Marshall et M. K. Wallis, “Supermassive galactic centre with repulsive gravity”, arXiv:1303.5604 [physics.gen-ph].
- [5] D. Huterer, M.S. Turner Prospects for probing Dark Energy via supernova distance measurements Phys. rev. D 60 (1999).
- [6] H. Bondi, Proc. Roy. Soc. (London), A281, 39 (1964) ;  
 S. A. Bludman et M. Ruderman, Phys. Rev., 170, 1176 (1968) ;  
 M. A. Ruderman, Phys. Rev., 172, 1286 (1968) ;  
 S. A. Bludman et M. A. Ruderman, Phys. Rev., D1, 3243 (1970) ;  
 G. S. Bisnovatyi-Kogan et Ya. B. Zeldovich, Astrofizika, 5, 223 (1969) ;  
 G.S. Bisnovatyi-Kogan et K. S. Thorne, Ap. J., 160, 875 (1970) ;  
 E. D. Fackerell, J. R. Isper et K. S. Thorne, Comments Astrophys. and Space Phys., 1, 140 (1969) ;  
 F. Hoyle et W. A. Fowler, Nature, 213, 373 (1967) ;  
 H. S. Zapolski, Ap. J., 153, L163 (1968).
- [7] G. Dvali et M. S. Turner, “Dark energy as a modification of the Friedmann equation”, arXiv:astro-ph/0301510.
- [8] Certains modèles décrivent l'effet de l'énergie sombre au moyen d'une constante cosmologique [1, 2].
- [9] D. Clowe, M. Bradac, A. H. Gonzalez, M. Markevitch, S. W. Randall, C. Jones et D. Zaritsky, “A direct empirical proof of the existence of dark matter”, arXiv:astro-ph/0608407v1.