CHAMP CENTRAL SYMÉTRIQUE EXTÉRIEUR - exercices

I. Coordonnées “harmoniques”

• Montrer que la condition $\partial_\alpha\left(\sqrt{|g|}\ g^{\alpha\beta}\right) = 0$ est équivalente à : $\Gamma^\beta = g^{\mu\nu}\,\Gamma^\beta{}_{\mu\nu} = 0$.

II. Coordonnées “harmoniques”

1. • Pour un changement de coordonnées $x^\alpha \to \underline{x}^\beta$ tel que : $dx^\alpha = \underline{\partial}_\beta x^\alpha\, d\underline{x}^\beta$ et $d\underline{x}^\beta = \partial_\alpha \underline{x}^\beta\, dx^\alpha$, montrer que la transformation de la quantité $\Gamma^\beta = g^{\mu\nu}\,\Gamma^\beta{}_{\mu\nu}$ peut s'écrire : $\underline{\Gamma}^\rho = \partial_\kappa \underline{x}^\rho\, \Gamma^\kappa - g^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta}\underline{x}^\rho$.

2. a) Soit φ une fonction scalaire, préciser l'expression de son d'alembertien : $\Box\varphi = g^{\alpha\beta}\, D_{\alpha\beta}\varphi$.
b) On appelle “fonctions harmoniques” celles dont le d'alembertien est nul : $\Box\varphi = 0$. Expliquer la dénomination des coordonnées “harmoniques” telles que $\Gamma^\beta = 0$.

III. Coordonnées “harmoniques” et limite newtonienne

1. • On raisonne dans la limite des champs gravitationnels faibles : $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ avec $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.
◊ remarque : ces notations supposent que l'espace “limite” sans gravitation est représenté à l'aide de coordonnées cartésiennes.
a) Montrer que les coordonnées sont “harmoniques” si et seulement si : $\partial_\mu(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\, h) = 0$.
b) Montrer que le tenseur de Ricci peut alors s'écrire : $R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu}$. Commenter.

2. • Retrouver la limite newtonienne avec ces notations.

IV. Coordonnées “harmoniques”

1. • On considère une sphère de rayon R, munie des coordonnées sphériques $\theta \in [0\,;\pi]$ et $\varphi \in [0\,;2\pi]$.
◊ remarque : en prévision de la question (3), on utilise pour cela les indices 2 et 3.
a) Exprimer la métrique de la surface : ds^2 , g_{ij} et g^{ij} .
b) En déduire la connexion : Γ_{ijk} et $\Gamma^i{}_{jk}$.
c) Montrer que ces coordonnées ne sont pas “harmoniques” : $\Gamma^i = g^{jk}\,\Gamma^i{}_{jk} \neq 0$.

2. a) Montrer qu'on peut chercher des coordonnées “harmoniques” en conservant φ.
b) Quelle expression $\zeta(\theta)$ faut-il choisir pour que les coordonnées $(\zeta\,;\,\varphi)$ soient “harmoniques” ?
c) Représenter graphiquement $\zeta(\theta)$ et commenter.
d) Exprimer la métrique et la connexion avec ces coordonnées.

3. • On souhaite généraliser la métrique à l'espace $\mathbb{R}^3$ en ajoutant la coordonnée radiale $r \in [0\,;\infty]$.
a) Montrer qu'on peut obtenir des coordonnées “harmoniques” en conservant ζ et φ , puis en recherchant une expression $\rho(r)$ appropriée.
b) Exprimer la métrique et la connexion avec ces coordonnées.

V. Coordonnées “harmoniques”

1. • On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cylindriques $r \in [0\,;\infty]$, $\theta \in [0\,;\pi]$ et $z \in [-\infty\,;\infty]$.
a) Exprimer la métrique : ds^2, g_{ij} et g^{ij} .
b) En déduire la connexion : Γ_{ijk} et $\Gamma^i{}_{jk}$.
c) Montrer que ces coordonnées ne sont pas “harmoniques” : $\Gamma^i = g^{jk}\,\Gamma^i{}_{jk} \neq 0$.

2. a) Montrer qu'on peut trouver $\rho(r)$ telle que les coordonnées $(\rho\,;\theta\,;z)$ soient “harmoniques”.
b) Exprimer la métrique et la connexion avec ces coordonnées.

VI. Champ statique à symétrie sphérique

• On considère un astre créant dans le vide environnant un champ statique à symétrie sphérique. On cherche la métrique sous la forme “classique” : $ds^2 = \mathrm{e}^{2\alpha(r)}\, c^2\, dt^2 - \mathrm{e}^{2\beta(r)}\, dr^2 - r^2.[d\theta^2 + \sin^2(\theta)\ d\varphi^2]$.

1. • Exprimer la connexion : $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ et $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$.

2. • D'après les équations du champ de gravitation, en déduire les relations déterminant α et β.

3. • En déduire l'expression de la métrique.

VII. Champ à symétrie sphérique

1. • On considère un astre créant dans le vide environnant un champ à symétrie sphérique. Justifier qu'on peut se ramener à une métrique de la forme :

$$ds^2 = A(r,t)\, c^2\, dt^2 - C(r,t)\, dr^2 - r^2.[d\theta^2 + \sin^2(\theta)\ d\varphi^2]\ .$$

2. a) Exprimer dans ce cas la connexion : $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ et $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$.
b) D'après les équations du champ de gravitation, en déduire les relations déterminant A et C.
c) En déduire l'expression de la métrique ; montrer qu'elle est forcément statique ; commenter.

3. a) En électromagnétisme, on considère qu'un système chargé exerce un champ électromagnétique sur son environnement et que ce champ s'établit par propagation d'ondes. Si on suppose qu'il en est de même pour la gravitation, que penser du champ gravitationnel causé par un astre à symétrie sphérique ?
b) Existe-t-il des ondes électromagnétiques à symétrie sphérique ? Conclure

VIII. Coordonnées “isotropes”

1. • On considère un astre créant dans le vide environnant un champ statique à symétrie sphérique. On cherche la métrique sous la forme “isotrope” : $ds^2 = \mathrm{e}^{2\alpha(\underline{r})}\, c^2\, dt^2 - \mathrm{e}^{2\beta(\underline{r})}\, \{d\underline{r}^2 + \underline{r}^2.[d\theta^2 + \sin^2(\theta)\ d\varphi^2]\}$.
a) Exprimer la connexion : $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ et $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$.
b) D'après les équations du champ de gravitation, en déduire les relations déterminant α et β.
c) En déduire l'expression de la métrique.

2. • Avec la variable radiale “classique” (notée r), la métrique peut s'écrire :

$$ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - r^2.[d\theta^2 + \sin^2(\theta)\ d\varphi^2] \quad \text{avec} \quad A(r) = \frac{1}{C(r)} = 1 - \frac{r_s}{r}\ .$$

a) Par comparaison, retrouver l'expression de la variable radiale “isotrope” (notée $\underline{r}$) en fonction de la variable “classique” r. En déduire inversement l'expression de r en fonction de $\underline{r}$.

b) D'un autre point de vue, par comparaison des deux formes de la métrique, en déduire une équation différentielle reliant r et $\underline{r}$. Intégrer l'équation précédente pour retrouver la relation entre r et $\underline{r}$.

IX. Coordonnées “isochrones”

• On considère un astre créant dans le vide environnant un champ statique à symétrie sphérique. On cherche s'il peut exister une métrique “isochrone” : $ds^2 = c^2\, dt^2 - \mathrm{e}^{2\beta(r)}\, dr^2 - \mathrm{e}^{2\delta(r)}\, r^2.[d\theta^2 + \sin^2(\theta)\ d\varphi^2]$.

1. • Exprimer la connexion : $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ et $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$.

2. • D'après les équations du champ de gravitation, en déduire les relations déterminant β et δ.

3. • En déduire qu'une telle métrique ne peut décrire qu'un espace plat.

X. Composantes angulaires de la métrique

• On considère un astre créant dans le vide environnant un champ statique à symétrie sphérique. On cherche une métrique sous la forme : $ds^2 = \mathrm{e}^{2\alpha(r)}\, c^2\, dt^2 - \mathrm{e}^{2\beta(r)}\, dr^2 - \mathrm{e}^{2\delta(r)}\, r^2\, d\Omega^2$, mais au lieu d'utiliser a priori la même dépendance angulaire qu'en géométrie plane, on cherche : $d\Omega^2 = d\theta^2 + \left(F(\theta)\right)^2 d\varphi^2$.

1. • Exprimer la connexion : $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ et $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$.

2. • D'après les équations du champ de gravitation, en déduire les relations déterminant α, β et δ.

3. • Montrer qu'on retrouve l'expression “classique” pour $d\Omega^2$.

XI. Analogue relativiste de l'énergie mécanique

• On raisonne dans le champ d'un astre statique à symétrie sphérique. La métrique limitée au plan $\theta = \frac{\pi}{2}$ peut s'écrire : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - D(r)\, d\varphi^2$.

• Les équations du mouvement correspondent à :

$A\, c\, \frac{dt}{ds} = \mathscr{k} = Cste$ (ceci est lié à la conservation de l'énergie) ;

$D\, \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\hbar}{c} = Cste$ (ceci est lié à la conservation du moment cinétique) ;

$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{\mathscr{k}^2}{A\, C} - \frac{\hbar^2}{c^2\, C\, D} - \frac{1}{C}$ (dans le cas d'une particule massive).

• Pour les coordonnées “classiques” ($D = r^2$), on obtient $A = \frac{1}{C} = 1 - \frac{r_s}{r}$ avec $r_s = \frac{2\,\mathcal{G}\,M}{c^2}$.

• En raisonnant avec un lagrangien, justifier qu'on peut considérer $\mathscr{k} = \frac{\mathcal{E}}{m\, c^2}$ où $\mathcal{E}$ est une quantité analogue relativiste de l'énergie mécanique.

◊ remarque : pour un photon on doit utiliser un autre paramètre que s puisque $ds = 0$; par contre on peut alors choisir un paramètre ς de façon telle que $\mathscr{k} = 1$.

XII. Invariance angulaire

1. • On considère un astre statique à symétrie sphérique et les notations “classiques” de Schwarzschild. La métrique s'écrit : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2$ avec $A = \frac{1}{C} = 1 - \frac{r_s}{r}$; $r_s = \frac{2\,\mathcal{G}\,M}{c^2}$.

• Déterminer s'il existe des vecteurs de Killing parmi les vecteurs de base suivants :

$$\overleftrightarrow{e_1} = \partial_1 \overleftrightarrow{M} = \frac{\partial \overleftrightarrow{M}}{\partial r} \;;\; \overleftrightarrow{e_2} = \partial_2 \overleftrightarrow{M} = \frac{\partial \overleftrightarrow{M}}{\partial \theta} \;;\; \overleftrightarrow{e_3} = \partial_3 \overleftrightarrow{M} = \frac{\partial \overleftrightarrow{M}}{\partial \varphi} .$$

2. • En déduire s'il est possible de déterminer ainsi des constantes du mouvement.

XIII. Point matériel en orbite circulaire

• On raisonne dans le champ d'un astre statique à symétrie sphérique. La métrique limitée au plan $\theta = \frac{\pi}{2}$ peut s'écrire : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - D(r)\, d\varphi^2$.

• On rappelle que les équations du mouvement correspondent à :

$A\,c\,\frac{dt}{ds} = \mathcal{k} = Cste$ (ceci est lié à la conservation de l'énergie : $\mathcal{k} = \frac{\mathcal{E}}{m\,c^2}$) ;

$D\,\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\hbar}{c} = Cste$ (ceci est lié à la conservation du moment cinétique) ;

$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{\mathcal{k}^2}{A\,C} - \frac{\hbar^2}{c^2\,C\,D} - \frac{1}{C}$ (dans le cas d'une particule massive).

1. • Pour les coordonnées “classiques” ($D = r^2$), on obtient $A = \frac{1}{C} = 1 - \frac{r_s}{r}$ avec $r_s = \frac{2\,\mathcal{G}\,M}{c^2}$.

a) Préciser la relation donnant $\frac{dr}{ds}$ dans ce cas.

b) En déduire une relation donnant $\frac{dr}{d\varphi}$, puis avec une variable de Binet $u = \frac{1}{r}$ en déduire des relations donnant $\frac{du}{d\varphi}$, puis $\frac{d^2u}{d\varphi^2}$.

2. a) En déduire les équations caractérisant le mouvement circulaire ; en déduire deux relations donnant $\mathcal{k}$ et $\hbar$ en fonction de r_s et u.

b) Montrer que les orbites circulaires ne sont possibles que pour certaines valeurs de $\frac{r}{r_s}$; commenter et préciser dans quelles conditions ces orbites circulaires sont des états liés.

c) Calculer la vitesse du point matériel correspondant à la trajectoire circulaire limite.

3. • Pour une trajectoire circulaire, établir la loi relativiste correspondant à la troisième loi de Kepler ; commenter.

XIV. Photon en orbite circulaire

• On raisonne dans le champ d'un astre statique à symétrie sphérique. La métrique limitée au plan $\theta = \frac{\pi}{2}$ peut s'écrire : $ds^2 = A(r)\,c^2\,dt^2 - C(r)\,dr^2 - D(r)\,d\varphi^2$.

• On rappelle que pour un photon les équations du mouvement correspondent à :

$A\,c\,\frac{dt}{d\varsigma} = \mathcal{k} = 1$ (ceci est lié à la conservation de l'énergie pour un photon) ;

$D\,\frac{d\varphi}{d\varsigma} = \frac{\hbar}{c} = Cste$ (ceci est lié à la conservation du moment cinétique) ;

$\left(\frac{dr}{d\varsigma}\right)^2 = \frac{\mathcal{k}^2}{A\,C} - \frac{\hbar^2}{c^2\,C\,D}$ (dans le cas d'un photon).

1. • Pour les coordonnées “classiques” ($D = r^2$), on obtient $A = \frac{1}{C} = 1 - \frac{r_s}{r}$ avec $r_s = \frac{2\,\mathcal{G}\,M}{c^2}$.

a) Préciser la relation donnant $\frac{dr}{d\varsigma}$ dans ce cas.

b) En déduire une relation donnant $\frac{dr}{d\varphi}$, puis avec une variable de Binet $u = \frac{1}{r}$ en déduire des relations donnant $\frac{du}{d\varphi}$, puis $\frac{d^2u}{d\varphi^2}$.

2. a) En déduire les équations caractérisant le mouvement circulaire ; en déduire deux relations imposant r et $\frac{\hbar}{\mathcal{k}}$ en fonction de r_s.

b) Pour une particule massive, la résolution donne $r > \frac{3\,r_s}{2}$; commenter.

c) Pour une particule massive, la résolution détermine $\hbar$ et $\mathcal{k}$ séparément ; commenter.

XV. Photon au voisinage d'une singularité

• On raisonne dans le champ d'un astre statique à symétrie sphérique. La métrique limitée au plan $\theta = \frac{\pi}{2}$ peut s'écrire : $ds^2 = A(r)\,c^2\,dt^2 - C(r)\,dr^2 - D(r)\,d\varphi^2$.

• On rappelle que pour un photon les équations du mouvement correspondent à :

$A\,c\,\frac{dt}{d\varsigma} = \mathscr{k} = 1$ (ceci est lié à la conservation de l'énergie pour un photon) ;

$D\,\frac{d\varphi}{d\varsigma} = \frac{\hbar}{c} = Cste$ (ceci est lié à la conservation du moment cinétique) ;

$\left(\frac{dr}{d\varsigma}\right)^2 = \frac{\mathscr{k}^2}{A\,C} - \frac{\hbar^2}{c^2\,C\,D}$ (dans le cas d'un photon).

1. • Pour les coordonnées “classiques” $(D = r^2)$, on obtient $A = \frac{1}{C} = 1 - \frac{r_s}{r}$ avec $r_s = \frac{2\,\mathcal{G}\,M}{c^2}$.

a) Préciser la relation donnant $\frac{dr}{d\varsigma}$ dans ce cas.

b) Exprimer la quantité $\frac{1}{r^2}\,\frac{dr}{d\varphi}$; en calculer la limite pour $r \to \infty$.

c) En mécanique newtonienne, montrer que la limite de $r^2\,\frac{d\varphi}{dr}$ correspond au “paramètre d'impact” b.

2. a) Montrer que l'existence d'un minimum d'approche nécessite que $b > r_s\sqrt{\frac{27}{4}}$.

b) Par intégration numérique, montrer que pour b voisin de la limite les trajectoires ont une allure très “enroulée” autour d'un rayon limite (à préciser). Commenter.

XVI. Effet Einstein

1. • Les expériences de Pound et Rebka (1960) puis de Pound et Snider (1965) utilisent un dispositif vertical, de hauteur $H = 22{,}5$ m, dans lequel on envoie (verticalement) un rayon lumineux gamma d'énergie $E = 14{,}4$ keV (issu de la désintégration de l'isotope ^{57}Fe instable).

a) Calculer la longueur d'onde du rayonnement.

b) Calculer le décalage spectral gravitationnel $z = \frac{\lambda_{réc} - \lambda_{ém}}{\lambda_{ém}}$.

c) Quel est l'intérêt de choisir la longueur d'onde qui est utilisée ici ?

2. a) Calculer l'ordre de grandeur du décalage spectral gravitationnel z pour le spectre émis par une naine blanche.

b) L'effet est nettement plus grand dans ce cas que dans le précédent ; expliquer pourquoi les résultats ne sont pourtant pas forcément plus précis.

Données : rayon de la Terre : $R = 6{,}4.10^6$ m ; constante de gravitation : $\mathcal{G} = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} ;
masse de la Terre : $M = 6{,}0.10^{24}$ kg ; constante de Planck : $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s ;
vitesse de la lumière : $c = 3{,}0.10^8$ m.s^{-1} ; charge électronique : $q_e = -1{,}6.10^{-19}$ C ;
masse d'une naine blanche : $M' \approx 1{,}2.10^{30}$ kg ; rayon d'une naine blanche : $R' \approx 8{,}8.10^6$ m.

XVII. Effet Einstein

1. • On considère une étoile à neutrons très massive $(M \approx 3\,M_S)$.

a) Calculer son rayon de Schwarzschild r_s.

b) Certains modèles proposent $R \approx R_0\sqrt[3]{\frac{M_S}{M}}$ avec $R_0 \approx 16$ km ; estimer le rayon R correspondant.

c) Estimer la masse volumique moyenne ; comparer à celle des neutrons.

2. • On observe l'étoile depuis une très grande distance ; en déduire le décalage spectral z.

Données : masse du Soleil : $M_S = 2{,}0.10^{30}$ kg ; constante de la gravitation : $\mathcal{G} = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} ;
rayon des nucléons : $r_n \approx 10^{-15}$ m ; masse des nucléons : $m_n = 1{,}6.10^{-27}$ kg .

XVIII. Avance du péri-astre des satellites

• On considère un astre statique à symétrie sphérique et les notations “classiques” de Schwarzschild. La métrique s'écrit : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2$ avec $A = \frac{1}{C} = 1 - \frac{r_s}{r}$; $r_s = \frac{2\,\mathcal{G}\,M}{c^2}$.

• Pour un mouvement dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$, les équations du mouvement impliquent :

$r^2\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \hbar = Cste$ (analogue de la loi des aires non relativiste) ;

$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2.(\mathcal{k}^2 - 1) + \frac{2\,\mathcal{G}\,M}{r} - \frac{\hbar^2}{r^2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$ (analogue à la loi déduite de l'énergie mécanique).

• Avec une variable de Binet $u = \frac{1}{r}$ on en déduit : $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} + \frac{3\,r_s\,u^2}{2}$ avec $\frac{1}{p} = \frac{c^2\,r_s}{2\,\hbar^2} = \frac{\mathcal{G}\,M}{\hbar^2}$.

• Le terme correctif relativiste étant généralement petit $(r_s\, u \ll 1)$, chercher les solutions sous la forme semblable au cas non relativiste : $u \approx \frac{1}{p'}[1 + e'\ \cos(\varphi')]$ avec : $\varphi' \approx \varphi\,.(1 - \varepsilon)$ et $\varepsilon \ll 1$.

XIX. Déviation des rayons lumineux par un astre

1. • Justifier l'utilisation d'une description corpusculaire des photons.

2. • Avec une variable de Binet $u = \frac{1}{r}$ l'équation relativiste du mouvement des photons peut s'écrire : $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3\,r_s\,u^2}{2}$. Or, l'équation non relativiste $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0$ a des solutions de la forme $u \approx \frac{1}{r_m}\cos(\varphi)$ décrivant des photons non déviés. Puisque le terme correctif est généralement petit $(r_s\, u \ll 1)$, résoudre l'équation au premier ordre en reportant dans le second membre la solution non relativiste.

3. a) En reportant dans l'équation la solution approchée au premier ordre obtenue précédemment, résoudre l'équation au second ordre.

b) En déduire la déviation à l'ordre deux, à l'aide de coordonnées asymptotiquement cartésiennes :

$x = r\ \cos(\varphi)$; $y = r\ \sin(\varphi)$.

c) Effectuer l'application numérique pour $\frac{r_s}{r_m} \approx 0{,}10$; commenter.

XX. Effet Shapiro

1. • D'après l'équation du mouvement des photons au voisinage d'un astre, on peut calculer la “durée” (intervalle de la variable t) de trajet d'un photon. Pour cela, on peut se ramener à exprimer la durée nécessaire pour qu'un photon parvienne en un point $M(r)$ en partant depuis le point $P(r_m)$ de sa trajectoire le plus proche de l'astre. En notant $A = 1 - \frac{r_s}{r}$ et $A_m = A(r_m)$, on obtient : $T(r_m\,,\, r) = \frac{1}{c}\int_{r_m}^{r} \frac{1}{A\sqrt{1 - \frac{r_m^2}{r'^2}\frac{A}{A_m}}}\, dr'$.

• Simplifier puis calculer cette expression dans le cas usuel pour lequel $r_s \ll r_m \leq r$.

2. • On considère le cas où le photon se propage depuis Mercure jusqu'à la Terre. Dans l'approximation précédente, on suppose qu'on peut calculer r_m en supposant que le trajet MPT est presque rectiligne. Exprimer r_m en fonction de la position angulaire φ de Mercure sur sa trajectoire apparente (synodique).

Données : rayon des orbites : $r_T = 149{,}6.10^6$ km ; $r_{Mer} = 57{,}9.10^6$ km .

XXI. Mouvement apparent de Mercure

1. • Déterminer les vitesses angulaires moyennes de la Terre et de Mercure dans leurs mouvements (supposés quasi-circulaires) en orbite autour du Soleil.

• En déduire la vitesse angulaire apparente de Mercure, observée depuis la Terre, lors de la conjonction supérieure.

2. • On considère un rayon lumineux se propageant depuis mercure jusqu'à la Terre ; on note P le point de ce rayon le plus proche du Soleil. Estimer la vitesse apparente de P lorsque Mercure “traverse” le disque solaire dans son mouvement apparent (synodique).

Données : rayon des orbites : $r_T = 149{,}6.10^6$ km ; $r_{Mer} = 57{,}9.10^6$ km ;
rayon du Soleil : $R_S = 696.10^3$ km .

XXII. Précession géodésique

• On considère un satellite, en orbite circulaire autour de la Terre, à bord duquel se trouve un gyroscope (soigneusement isolé des effets parasites électriques et magnétiques). On étudie l'évolution de l'orientation du spin S^μ du gyroscope. On suppose négligeable l'effet de rotation de la Terre sur elle même : on raisonne avec la métrique “classique” de Schwarzschild. Pour simplifier les notations, on considère que l'orbite est dans le plan équatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$.

◊ remarque : l'effet Einstein-de Sitter décrit ici est parfois nommé “précession géodétique”, par traduction anormale du terme anglais “geodetic”, signifiant “géodésique”.

1. • Le gyroscope (comme le satellite) peut être considéré comme évoluant sous le seul effet de la gravitation ; écrire la forme générale des équations d'évolution de son spin.

2. a) Les équations précédentes dépendant du mouvement du satellite, écrire la forme générale des équations du mouvement (sans supposer tout de suite le mouvement circulaire).

b) Intégrer les équations pour $x^0 = c\,t$ et $x^3 = \varphi$; noter $\mathcal{k}$ et $\hbar$ les constantes d'intégration décrivant respectivement l'énergie mécanique et le moment cinétique.

c) Montrer qu'on obtient l'équation pour $x^1 = r$ d'après la métrique (plus simplement qu'en intégrant). Exprimer le résultat à l'aide de $\mathcal{k}$ et $\hbar$.

d) Dans le cas du mouvement circulaire étudié, en déduire $\mathcal{k}$ et $\hbar$ en fonction du rayon r .

e) En déduire la vitesse angulaire $\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$ en fonction du rayon de l'orbite.

f) Montrer que la 4-vitesse $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ peut s'écrire : $U^\alpha = \dot{t}\,.(c, 0, 0, \Omega)$; exprimer $\dot{t}$ en fonction de r .

3. a) Préciser les équation décrivant l'évolution de S^0, S^1, S^2 et S^3 ; vérifier que S^2 reste constante et n'influe pas sur les autres composantes.

b) Montrer que l'orthogonalité entre S^α et U^α impose la relation : $S^0 = \frac{r^2}{A}\frac{\Omega}{c}\,S^3$.

c) En déduire que l'équation sur S^0 est équivalente à celle sur S^3 .

d) Simplifier l'équation sur S^1 et en déduire un système de deux équations sur S^1 et S^3 .

e) Résoudre ce système en supposant que le spin est initialement selon l'orientation radiale sortante.

f) Interpréter le résultat ; justifier qu'il décrit une précession du spin.

4. a) Calculer l'angle de précession pour une période du satellite, puis calculer la vitesse angulaire de précession.

b) Effectuer l'application numérique (correspondant au satellite “gravity probe B”).

Données : rayon de Schwarzschild de la Terre : $r_s \approx 8{,}9$ mm ;
rayon de l'orbite du satellite (de faible altitude) : $r \approx 7000$ km .

XXIII. Précession géodésique

• On considère un satellite, en orbite circulaire autour de la Terre, à bord duquel se trouve un gyroscope (soigneusement isolé des effets parasites électriques et magnétiques). On étudie l'évolution de l'orientation du spin S^μ du gyroscope. Pour simplifier les notations, on considère que l'orbite est dans le plan équatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$.

1. • Dans un premier temps, on souhaite aborder le problème en relativité restreinte, avec la gravitation newtonienne. Pour cela, on se propose d'utiliser un référentiel "de repos", tournant comme le satellite, correspondant à $\phi = \varphi - \omega\, t$.

a) Montrer que la métrique de Minkowski peut ainsi s'écrire (en version polaire simplifiée) :

$$ds^2 = (c^2 - r^2\,\omega^2)\,\left[dt - \frac{r^2\,\omega}{c^2 - r^2\,\omega^2}\,d\phi\right]^2 - dr^2 - \frac{c^2}{c^2 - r^2\,\omega^2}\,r^2\,d\phi^2 \ .$$

b) Exprimer le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et le tenseur "inverse" $g^{\mu\nu}$ correspondants.

c) Exprimer la connexion affine $\Gamma_{\mu\alpha\beta}$ puis $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$.

d) Écrire les équations des géodésiques et identifier les termes correspondant à la force centrifuge et à la force de Coriolis.

e) Décrire qualitativement le mouvement observé en l'absence de force (en particulier de gravitation) appliquée au satellite.

f) Déterminer la vitesse de rotation ω du satellite (dans le référentiel galiléen) sous l'effet de la gravitation newtonienne, ou inversement déterminer le paramètre ω tel que le satellite reste immobile dans le référentiel tournant.

g) Écrire les équations d'évolution du spin S^α du gyroscope dans le référentiel tournant.

h) Résoudre ce système d'équation et en déduire la précession du gyroscope, dans le référentiel tournant, puis dans le référentiel galiléen.

2. • On souhaite maintenant étudier le problème avec la gravitation relativiste. On suppose négligeable l'effet de la rotation de la Terre sur elle même : on raisonne à partir de la métrique "classique" de Schwarzschild (et non une métrique décrivant un astre en rotation telle la métrique de Kerr).

a) De façon analogue à ce qui a été fait à partir de la métrique de Minkowski, exprimer la métrique de Schwarzschild dans un référentiel en rotation correspondant à $\phi = \varphi - \omega\, t$.

b) Exprimer le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et le tenseur "inverse" $g^{\mu\nu}$ correspondants.

c) Exprimer la connexion affine $\Gamma_{\mu\alpha\beta}$ puis $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$.

d) Écrire les équations des géodésiques et en déduire le paramètre ω tel que le satellite reste immobile dans le référentiel tournant.

e) Écrire les équations d'évolution du spin S^α du gyroscope dans le référentiel tournant.

f) Résoudre ce système d'équations et en déduire la précession du gyroscope, dans le référentiel tournant, puis dans le référentiel "galiléen" (à l'infini). Commenter.