

RG XIII - CHAMP CENTRAL INTÉRIEUR “SANS PRESSION”

1. Étude du cas statique intérieur

1.1. Modèle du solide “simple”

• Les équations du champ peuvent s'écrire $R^{\alpha\beta} = \chi \cdot (T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} T)$.

Par ailleurs : $T^{\alpha\beta} = (p + \varepsilon_0) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta}$, où p et ε_0 désignent la pression (le tenseur des contraintes est quasi-isotrope : solide \approx fluide) et l'énergie volumique mesurées dans le référentiel propre du fluide.

Une description simple (plausible au moins pour le comportement qualitatif d'un petit astre, mais peut être aussi pour certains modèles cosmologiques) consiste à supposer négligeables les termes de pression : $T^{\alpha\beta} = \mu U^\alpha U^\beta$, où μ est la masse volumique du solide, ici immobile ($\mu = \mu_0$).

• Avec une métrique de la forme : $ds^2 = A(r) c^2 dt^2 - C(r) dr^2 - D(r) d\Omega^2$, on obtient : $U^0 = \frac{c}{\sqrt{A}}$ et $U^k = 0$.

Ceci correspond à : $T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T = \frac{\varepsilon}{2}$; $T_{11} - \frac{1}{2} g_{11} T = C \frac{\varepsilon}{2}$;
 $T_{22} - \frac{1}{2} g_{22} T = D \frac{\varepsilon}{2}$; $T_{33} - \frac{1}{2} g_{33} T = D \sin^2(\theta) \frac{\varepsilon}{2}$.

Par ailleurs : $R_{00} = \frac{A''}{2C} - \frac{A'}{2C} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} - \frac{D'}{D} \right)$;
 $R_{11} = -\frac{A''}{2A} - \frac{D''}{D} + \frac{A'}{2A} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} \right) + \frac{D'}{D} \left(\frac{C'}{2C} + \frac{D'}{2D} \right)$;
 $R_{22} = -\frac{D''}{2C} - \frac{D'}{2C} \left(\frac{A'}{2A} - \frac{C'}{2C} \right) + 1$; $R_{33} = R_{22} \sin^2(\theta)$.

 *exercice n° I.*

1.2. Équations du champ

• Compte tenu des identités de Bianchi, les équations du champ ne sont pas indépendantes (c'est ce qui permet un choix de type de coordonnées). On peut mettre en évidence deux combinaisons permettant de simplifier :

$$\frac{D'}{2} \left(\frac{A'}{A} + \frac{D'}{2D} \right) = C ; \quad -\frac{D''}{C D} + \frac{D'}{2 C D} \left(\frac{C'}{C} + \frac{D'}{2 D} \right) + \frac{1}{D} = \chi \varepsilon .$$

• Les quantités qui “contiennent” l'information physique sous forme géométrique sont a priori $A(r)$ et $D(r)$; elles doivent en particulier être des fonctions continues à dérivées continues, puisqu'elles jouent le rôle de potentiels de gravitation.

La quantité $C(r)$ ne fait que décrire le choix de variable radiale ; le plus logique serait d'utiliser $C = 1$ mais les équations ne se simplifient pas dans ce cas.

 *exercice n° II.*

2. Résolution en coordonnées “classiques”

2.1. Expression globale de la métrique

• La liberté de choix de coordonnée n'est pas totale ; en présence d'un champ de gravitation, il est impossible de choisir $A = 1$ (pour une métrique statique) ou $D = 1$.

Il se trouve que les équations du champ se simplifient en choisissant $D = r^2$; ceci a toutefois l'inconvénient de transférer sur la variable r (donc sur C) une partie de l'information géométrique décrivant la physique.

Ainsi, si dans certaines régions de l'espace la grandeur D décroît quand on s'éloigne de l'astre central, alors il en est de même pour la variable r . Il faut alors prendre grand soin à l'interprétation qu'on en déduit.

• Il faut noter qu'en général, si la quantité $C(r)$ doit être continue, puisqu'elle décrit la métrique, rien n'impose a priori qu'elle soit à dérivée continue.

Avec le choix $D = r^2$ reportant sur la variable r l'information physique contenue dans $D(r)$, la nécessaire continuité de $\frac{dr}{d\ell}$ est assurée par celle de $C(r)$.

- Dans le cas particulier $D = r^2$ on obtient $D' = 2r$ et $D'' = 2$; ainsi :

$$\frac{A'}{A} = \frac{C-1}{r} ; \quad \frac{1}{C} - \frac{r C'}{C^2} = 1 - \chi \varepsilon r^2 .$$

La première équation donne : $A = Cste . \exp \left(\int \frac{C-1}{r} dr \right)$.

La seconde équation conduit à : $\frac{r}{C} = r - \chi \int \varepsilon r^2 dr + Cste$, où la constante d'intégration peut être incluse dans la borne inférieure de l'intégrale.

- Pour préciser les conditions physiques d'intégration, il faut toutefois éviter l'ambiguïté des notations. En notant par exemple pour le "rayon interne" de l'astre $\rho = \int_{r(0)}^R \sqrt{C(r')} dr'$ (distance au centre), on signale que le "rayon apparent" R est déduit du périmètre de l'astre (grandeur observée) et que ρ ne peut être connu sans préciser quelle valeur $r(0)$ correspond au centre.

- On peut poser : $M(r) = \int_{r_0}^r \mu(r') 4\pi r'^2 dr'$ et $a(r) = \frac{\chi c^2}{4\pi} M(r) = \frac{2G}{c^2} M(r)$.

La relation précédente peut alors s'écrire sous la forme : $C(r) = \frac{r}{r-a(r)}$.

Ceci permet de préciser : $A = \alpha_0 \exp \left(\int_{r_0}^r \frac{a(r')}{r'(r'-a(r'))} dr' \right)$ avec $\alpha_0 = A(r_0)$.

- Il semble logique que la métrique soit déduite de l'intégration de μ sur l'ensemble de la répartition de masse ; cela correspond à $a(r(0)) = 0$ donc $M(r(0)) = 0$ et $r_0 = r(0)$ (mais cette valeur reste à préciser) ; par ailleurs $r_s = a(R)$ et on note la masse totale $M = M(R)$.

♦ remarque : on peut soupçonner que $r(0) = 0$ mais ici la géométrie n'est pas connue a priori, donc rien ne prouve que $\lim_{\rho \rightarrow 0} r(\rho) = 0$.

2.2. Solution extérieure

- À l'extérieur de l'astre : $M = \int_{r_0}^R \mu(r') 4\pi r'^2 dr'$ et $r_s = \frac{2GM}{c^2}$; ceci redonne l'expression "classique" : $C = \frac{r}{r-r_s}$.

◇ remarque : l'intégrale $\int_{r_0}^R \mu(r') 4\pi r'^2 dr'$ correspond à la masse totale mais le volume infinitésimal n'est pas $4\pi r^2 dr$; ceci est lié au fait que cette masse totale n'est pas la somme des masses infinitésimales, car il intervient aussi la “masse équivalente” associée à l'énergie d'interaction gravitationnelle.

• On obtient aussi par ailleurs :

$$A(r) = \alpha_0 \exp \left(\int_{r_0}^R \frac{a(r')}{r' \cdot (r' - a(r'))} dr' \right) \exp \left(\int_R^r \frac{r_s}{r' \cdot (r' - r_s)} dr' \right) ;$$

$$A(r) = A(R) \frac{R}{R-r_s} \frac{r-r_s}{r} = \frac{r-r_s}{r} = \frac{1}{c(r)} \text{ puisque } A = 1 \text{ à l'infini.}$$

2.3. Solution intérieure

• Pour les masses volumiques modérées, il semble logique que la dérivée de $M(r)$ s'annule au centre, comme c'est le cas dans un espace plat (ceci est lié au fait que la surface d'une sphère tend vers zéro en même temps que le rayon) : $a'(r_0) = \chi c^2 \mu(r_0) r_0^2 = 0$ et donc $r_0 = 0$.

Ce raisonnement ne s'applique pas si la masse volumique diverge au centre, mais il est difficile de justifier une sorte de “transition de phase” qui ferait qu'à partir de certaines conditions (lesquelles ?) on obtiendrait $r_0 \neq 0$.

La résolution littérale n'est pas simple dans le cas général. On peut procéder par intégration numérique, mais on peut aussi s'intéresser à chercher des hypothèses simplificatrices permettant de mettre en évidence simplement les propriétés physiques prépondérantes.

 *exercice n° III.*

2.4. Masse volumique uniforme

• Avec une masse volumique uniforme (ce qui peut être une bonne approximation qualitative) : $a(r) = \lambda r^3$ avec $\lambda = \frac{\chi \varepsilon}{3}$.

Ainsi $c(r) = \frac{r}{r-a(r)} = \frac{1}{1-\lambda r^2}$; ceci impose $r < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

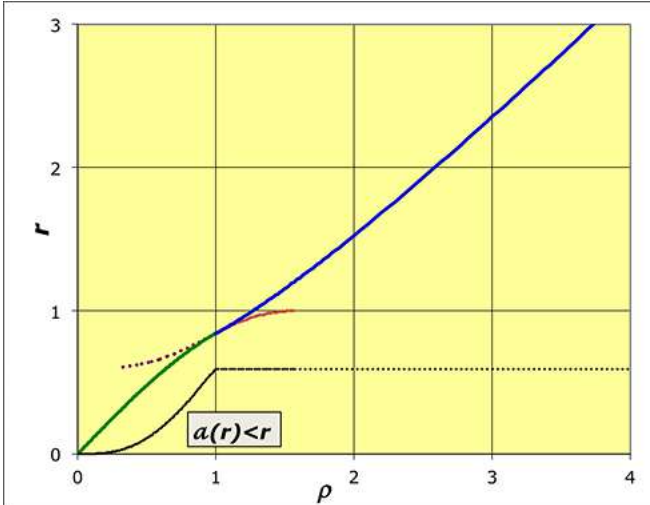
• On peut aussi préciser $A = \alpha_0 \exp\left(\int_0^r \frac{a(r')}{r'(r'-a(r'))} dr'\right)$ pour une masse volumique uniforme : $A = \alpha_0 \exp\left(\int_0^r \frac{\lambda r'}{1-\lambda r'^2} dr'\right) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{1-\lambda r^2}} = \alpha_0 \sqrt{C}$; la contrainte imposée est donc la même : $r < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

• Le raccordement en surface impose : $A(R) = \frac{1}{C(R)} = \alpha_0 \sqrt{C(R)}$ donc $A(0) = \alpha_0 = [A(R)]^{3/2}$.

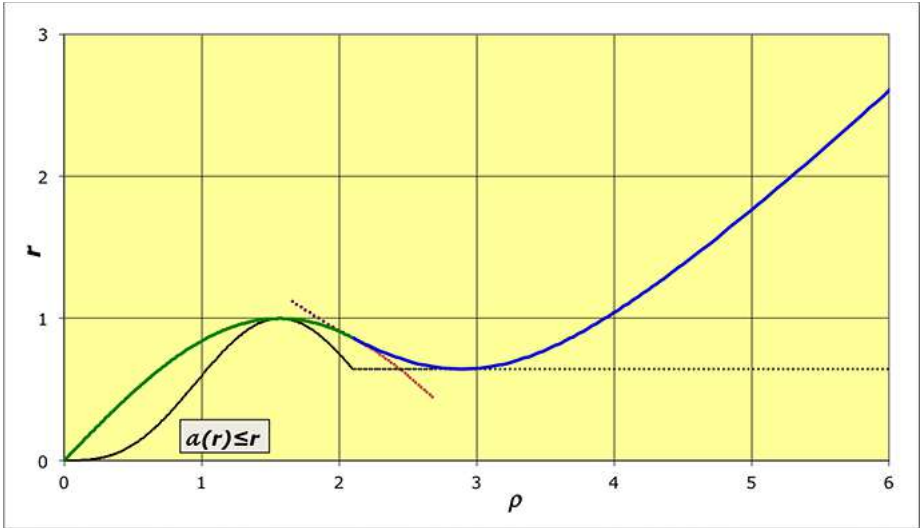
• Puisque la distance radiale peut s'écrire $d\rho = \pm \sqrt{C(r)} dr$, le "rayon intérieur" (distance au centre) correspond ici à : $\rho = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin(r \sqrt{\lambda})$.

Inversement : $r = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\rho \sqrt{\lambda})$; la condition limite $r < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ correspond donc à $\rho < \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$; on peut vérifier que les dimensions des astres "connus" respectent cette condition.

• Il est alors utile de considérer la variation de r en fonction de ρ . Pour λ fixé (les représentations graphiques prennent $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ comme unité de longueur), les rayons $R < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ donnent un raccordement simple ; la singularité n'est jamais atteinte : $a(r) < r$ en tout point.



- Mais il est surtout important de comprendre qu'au delà $r(\rho)$ est décroissant (si une telle solution peut exister physiquement) ; les “rayons intérieurs” $\rho > \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$ correspondent à $R < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$; ils donnent “en principe” un raccordement supra-limite, où la singularité $r = a(r)$ est atteinte à l'intérieur, mais jamais dépassée : $a(r) \leq r$ et $r_s < R$ car $a(r)$ diminue près de la surface.

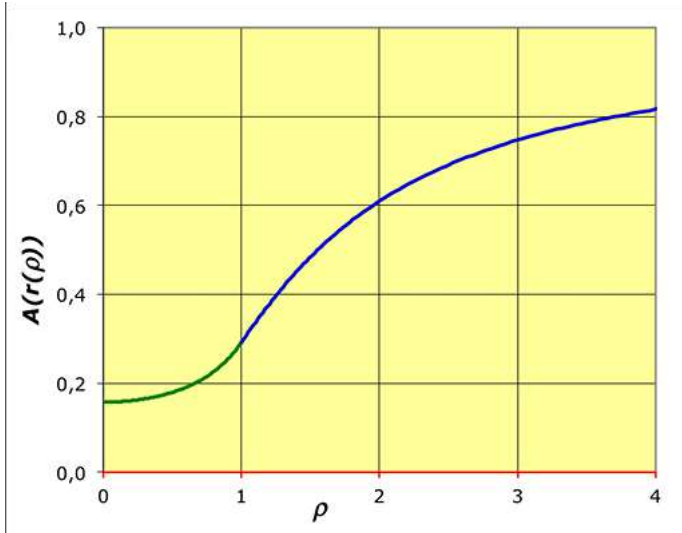


- La décroissance de $r(\rho)$ dans la zone intermédiaire justifie d'une certaine manière le comportement mathématique ; si $r(\rho)$ intérieur décroît près de la surface, le raccordement impose logiquement que $r(\rho)$ extérieur y soit décroissant, avec un minimum pour $r = r_s$. Ceci impose d'adopter la description extérieure déduite des coordonnées “isotropes” (qui n'est pas exempte de problèmes d'interprétation ; rien ne prouve a priori que cette solution mathématique ait une signification physique).

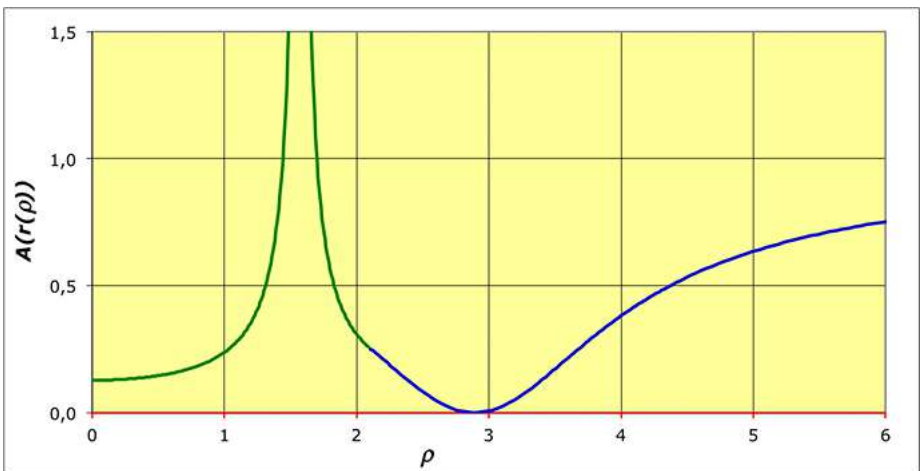
La singularité $r = r_s$ est alors atteinte aussi à l'extérieur, car r diminue aussi ensuite, mais $r_s \leq r$ (en adoptant l'interprétation “isotrope”).

- À ce niveau, il semble qu'aucune contrainte physique n'impose de taille maximum (pour une masse volumique donnée). Peut-il exister des astres de très grande taille et masse, pour lesquels la limite serait dépassée ? Un tel comportement n'est aucunement justifié tant qu'on n'a pas montré qu'il existe des cas de ce type pour lesquels la pression est effectivement négligeable.

- Dans le cas simple $R < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ (sans inversion), $A(r(\rho))$ croît régulièrement ; le champ est donc qualitativement comparable à celui d'un champ newtonien.




- Par contre, si la limite est dépassée (avec l'interprétation "isotrope"), on observe entre les deux rayons où $r = a(r)$ et $r = r_s$ une décroissance de $A(r(\rho))$, ce qui correspond à un champ gravitationnel répulsif.



Non seulement la matière éventuellement captée par chute sur l'astre ralentirait sa chute à l'approche de la surface, mais elle ne pourrait ensuite pas y rester : un tel astre ne peut être stable car toute la couche de surface dans cette zone serait violemment rejetée vers l'extérieur par un champ gravitationnel à la limite infiniment répulsif (nova ou supernova). Une éventuelle étude devrait donc être faite en incluant des termes dynamiques dans les équations.

♦ remarque : on peut trouver “déroutant” d'envisager des situations où la gravitation est répulsive, mais cela est aussi présent dans des modélisations de Friedmann (avec d'ailleurs une pression supposée négligeable) décrivant un univers en expansion accélérée, où la constante cosmologique Λ joue un rôle analogue à celui ici tenu par λ .

 *exercices n° IV, V et VI.*

2.5. Masse “interne” et masse “externe”

• La quantité $M(r) = \int_0^r \mu(r') 4\pi r'^2 dr'$ (masse de l'ensemble jusqu'au rayon r , vu de l'extérieur), intervenant dans l'expression de la métrique, n'est pas la somme des masses à l'intérieur de la partie correspondante de l'astre.

En notant ρ la distance au centre (rayon “intérieur”), la somme des masses est : $\sum m(r) = \int_0^r \mu(r') 4\pi r'^2 d\rho(r') = \int_0^r \mu(r') 4\pi r'^2 (\pm \sqrt{C(r')}) dr'$.

La différence entre les deux correspond à l'énergie d'interaction gravitationnelle entre les masses intérieures : $E_{gr}(r) = [M(r) - \sum m(r)] c^2$.

• Avec μ uniforme : $M(r) = \mu \frac{4\pi}{3} r^3$. Par ailleurs : $C(r) = \frac{1}{1-\lambda r^2}$; on obtient ainsi : $\sum m(r) = \frac{2\pi}{\lambda} \mu \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin(r\sqrt{\lambda}) - r\sqrt{1-\lambda r^2} \right]$.

• On peut alors comparer les états d'un astre, en deçà où en delà de la limite. En conservant une masse intérieure $\sum m$ constante, un état plus compact correspond à une masse volumique μ plus grande (donc aussi λ), ainsi qu'à un rayon intérieur $\rho(R)$ plus petit (donc aussi le rayon extérieur R).

En notant $X = \sqrt{\lambda} R$ la proportion par rapport à la limite, si on suppose $\Sigma m = \frac{6\pi}{\chi c^2} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\arcsin(X) - X \sqrt{1 - X^2})$ constant on obtient : $\frac{d\lambda}{dX} > 0$; ainsi X augmente avec la compacité et peut en principe atteindre la limite 1 pour les astres les plus “compacts”.

• D'un autre point de vue, on peut montrer de même que dans ces conditions la masse externe $M = M(R) = \frac{4\pi}{\chi c^2} \lambda R^3 = \frac{4\pi}{\chi c^2} \frac{X^3}{\sqrt{\lambda}}$ décroît aussi quand la compacité augmente. Ceci est logique puisque $M = \Sigma m + \frac{E_{gr}}{c^2}$ avec une énergie gravitationnelle E_{gr} négative, dont la valeur absolue augmente. Si de la matière “très compacte” existe, alors l'astre très effondré qui en résulterait répondrait effectivement à un modèle d'astre quasi ponctuel, mais avec une masse M tendant vers zéro, ce qui semble plutôt dénué d'intérêt, ou avec une température tendant vers l'infini, ce qui n'est pas a priori propice à la stabilité.

♦ remarque : l'effondrement d'un astre est un cas différent ; la diminution de l'énergie gravitationnelle conduit à une augmentation de la température, donc une augmentation supplémentaire de μ .

• Inversement, on peut considérer un candidat “trou noir” situé au centre d'une galaxie, en le supposant presque à la limite de stabilité ($X \approx 1$). Avec une masse $M = 2,6 \cdot 10^6 M_S$ on obtient : $R \approx 8 \cdot 10^6 \text{ km}$ et $\mu \approx 2,6 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Cette masse volumique est extrêmement loin de la concentration maximale que permettent les interactions corpusculaires (comment la pression interne pourrait-elle expliquer un tel écart ?). On peut imaginer que ce soit un “gaz” de naines sombres, dont la concentration ne pourrait augmenter car sinon la gravitation deviendrait répulsive.

Pour des “constituants” semblables aux naines blanches ($\mu \approx 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$), leur distance moyenne serait environ sept fois leur rayon ($R \approx 10^4 \text{ km}$). Cela semble impossible car les collisions (forcément très violentes, donc visibles) y seraient fréquentes.

Pour des “constituants” du type étoiles à neutrons ($\mu \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$), alors leur distance moyenne serait environ 6000 fois leur rayon ($R \approx 5 \text{ km}$). Cela semble moins improbable, mais il reste difficile de justifier que ce soit éventuellement plausible.

◇ remarque : il est surtout clair qu'on atteint ici la limite de ce qui peut être déduit du modèle ; pour une description plus élaborée il faut ajouter une équation thermodynamique.

 *exercices n° VII, VIII, IX et X.*

3. Modèles cosmologiques

• Si on imagine, à nettement plus grande échelle, un univers contenant des “hyper-amas” de matière, de masse volumique $\mu \approx 10^{-27} \text{ kg.m}^{-3}$, à la limite de stabilité, alors leur rayon serait de quelques dizaines de milliards d'années-lumière (et leur masse de l'ordre de 10^{53} kg). C'est ce qu'on considère usuellement comme la taille de l'univers ; ici on suppose ces hyper-amas inclus dans un univers plus grand, contenant ailleurs nettement moins de matière.

Imaginons que deux tels hyper-amas entrent en collision ; l'ensemble dépasserait alors la limite et, si on adopte la modélisation précédente, le champ gravitationnel deviendrait violemment répulsif entre les deux sphères singulières où $r = a(r)$. Cela correspondrait à un “hyper trou noir”, très instable, donc explosant en hyper-nova.

Toutefois, à une telle échelle, l'explosion serait très lente. Comment apparaîtrait l'espace autour d'un observateur situé dans la zone en expansion ?

Les champs de gravitation locaux n'y seraient pratiquement pas perturbés par le comportement à grande échelle.

Or, l'observateur ne recevrait aucune lumière de la zone interne, ni aucune lumière de la zone externe, masquées chacune par une singularité (la lumière peut passer les singularités, mais elle met pour cela une durée apparente infinie). Il aurait donc probablement l'impression d'être dans un univers limité et en expansion.

Il y aurait en outre dans ce cas une difficulté d'interprétation géométrique puisque la propriété $\frac{dr}{d\rho} < 0$ caractérisant cette zone pourrait donner l'impression de voir du côté “extérieur” ce qui correspond au côté “intérieur” de l'hyper globule (et inversement).

Bien que pouvant sembler plutôt étrange par certains aspects, ce type de configurations gagnerait probablement à être étudié plus en détail, pour tenter de savoir s'il peut exister des circonstances particulières dans lesquelles cela décrirait des solutions physiquement acceptables.

♦ remarque : une propriété d'une telle configuration serait que le contenu en étoiles et galaxies serait issu d'un univers plus grand et plus ancien ; ainsi près de la limite ("horizon") on y observerait des galaxies que l'on interpréterait à tort comme jeunes mais qui contiendraient une proportion "anormalement" grande d'étoiles anciennes.

4. Limite de validité de la modélisation

• Pour connaître la limite de validité de cette modélisation (pression négligeable en comparaison de l'énergie de masse), on peut étudier la pression d'après la loi de la statique.

À l'intérieur de l'astre : $\frac{2}{p+\varepsilon} p' + \frac{A'}{A} = 0$ donne $A(r) \cdot (p(r) + \varepsilon)^2 = Cste$.

Puisque la pression est nulle à l'extérieur : $Cste = A(R) \varepsilon^2$.

• Dans le cas d'une masse volumique uniforme, la simplification aboutit à :


$$p(r) = \frac{3\lambda}{\chi} \left(\frac{\sqrt[4]{1-\lambda r^2}}{\sqrt[4]{1-\lambda R^2}} - 1 \right).$$

• Outre les conditions pour que cette expression soit définie mathématiquement, il faut imposer la restriction liée à l'hypothèse physique $p \ll \varepsilon$.

Or, la pression est maximale au centre ($r = 0$) et $p \ll \varepsilon = \frac{3\lambda}{\chi}$ correspond à

$1 - \lambda R^2 \gg \frac{1}{16}$ donc $R \ll \sqrt{\frac{15}{16}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Cette condition montre que seuls les astres très en deçà de la limite de stabilité peuvent être décrits ainsi (on exclut les astres vérifiant cette condition, mais au delà de la limite, puisque le raisonnement sur la pression montre que la zone dépassant la limite serait forcément instable).

Une étude complète négligeant la pression nécessite donc une prise en compte d'aspects dynamiques (équilibre impossible) ; sinon, un raisonnement statique avec l'hypothèse d'équilibre nécessite une prise en compte de la pression.

 *exercice n° XI.*